Bemerkung 3.5: Das Kommutativgesetz gilt nicht, im Allgemeinen ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Aufgabe 3.3: Man berechne $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, wenn $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist und vergleiche die Ergebnisse!

Bemerkung 3.6: Ein Matrizenprodukt kann die Nullmatrix ergeben, ohne dass ein Faktor Nullmatrix ist.

Satz 3.12: Eine (m, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ bleibt unverändert, wenn man sie mit den Einheitsmatrizen $\boldsymbol{E}_n$ (von rechts) bzw. $\boldsymbol{E}_m$ (von links) multipliziert: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{E}_m \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Beispiel 3.9:

Eine lineare Transformation,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\
y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

das ist eine Vorschrift, die eine eindeutige Abbildung des $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ vermittelt, d. h. jedem Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ eindeutig einen Punkt $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ zuordnet, lässt sich unter Anwendung der Matrizenmultiplikation mit der Koeffizientenmatrix (3.10) kürzer darstellen in der Form

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{3.13}$$

Ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ ein Konstantenvektor, so folgt aus (3.13)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \tag{3.14}$$

die Darstellung eines linearen Gleichungssystems, bestehend aus m Gleichungen für n Unbekannte $x_1 \ldots x_n$. ■

Führt man im Anschluss an die lineare Transformation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ nach $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$ mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m, n) noch eine lineare Transformation $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{y}$ von $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$ nach $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^p$ mit einer Matrix $\boldsymbol{B}$ vom Typ (p, m) durch, so entsteht eine lineare Transformation $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ nach $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^p$ mit einer Matrix $\boldsymbol{C}$ vom Typ (p, n). Nach Satz 3.11 (Assoziativgesetz) gilt aber $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x}$, also gilt für die Gesamttransformation $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ (eine Motivation für Definition 3.13).

3.2.4 Inverse Matrix

Der Begriff der **inversen Matrix** ist verwandt mit dem Begriff des Kehrwertes a^{-1} einer Zahl $a \neq 0$. Ein Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ von n Gleichungen mit n Unbekannten mit einer regulären (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ hat nach Satz 3.7 eine eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x}$. Die Lösung hängt linear von $\boldsymbol{a}$ ab, kann also mit einer (n, n)-Matrix $\boldsymbol{B}$ in der Form $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}$ ausgedrückt werden. Diese Matrix $\boldsymbol{B}$ nennt man inverse Matrix von $\boldsymbol{A}$.

In Anlehnung an die Beziehung $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ schreibt man für die inverse Matrix $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, und für sie gilt die Beziehung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Satz 3.13: Zu jeder regulären (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert genau eine (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$, genannt **inverse Matrix** oder **Kehrmatrix**, für die gilt:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_n. \tag{3.15}$$

Sie hat die Form

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} & \cdots \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} & \cdots \\ A_{13} & -A_{23} & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = \left(\frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{|\boldsymbol{A}|} \right). \tag{3.16}$$

Darin bedeuten $|\boldsymbol{A}|$ die Determinante von $\boldsymbol{A}$ und A_{ij} ihre gemäß Definition 3.3 definierten Unterdeterminanten.

Man erhält $\boldsymbol{A}^{-1}$ also dadurch, dass man die Matrix (A_{ij}) der Unterdeterminanten von $\boldsymbol{A}$ transponiert, dann schachbrettartig die Vorzeichen ändert und die so entstandene Matrix durch $|\boldsymbol{A}|$ dividiert.

Beweis: Die Richtigkeit der Lösungsformel (3.16) beweist man, indem man das Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ (bzw. $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}$) gemäß Definition 3.12 bildet. Danach ist das Element c_{ij} von $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ skalares Produkt der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$: $(a_{i1} \ a_{i2} \ \ldots \ a_{in})$ mit der j-ten Spalte von $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\left(\frac{(-1)^{j+1} A_{j1}}{|\boldsymbol{A}|} \quad \frac{(-1)^{j+2} A_{j2}}{|\boldsymbol{A}|} \quad \cdots \quad \frac{(-1)^{j+n} A_{jn}}{|\boldsymbol{A}|} \right).$$

Nach dem LAPLACEschen Entwicklungssatz (Satz 3.1) und bei Beachtung von Satz 3.3 ist dieses Produkt gleich null für $i \neq j$ (weil man Determinanten mit übereinstimmenden Zeilen erhält) und gleich $\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}|} = 1$ für $i = j$. Es ist also $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_n$. Analog lässt sich zeigen: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$.

Die Eindeutigkeit der Kehrmatrix beweist man, indem man zeigt, dass, wenn die Multiplikation der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit irgendeiner Matrix $\boldsymbol{B}$ von links (bzw. von rechts) auf die Einheitsmatrix führt, diese Matrix $\boldsymbol{B}$ die Kehrmatrix sein muss. Es sei $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. Die Multiplikation dieser Matrizengleichung mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts ergibt

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1} \ \text{(wegen } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} \ \text{(wegen } \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}).$$

Ebenso folgt aus $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, dass $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ sein muss. □

Beispiel 3.10:

Man ermittle die inverse Matrix zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Es ist $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist also regulär.

Die Unterdeterminanten der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Damit wird gemäß (3.16)

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} +1 & -0 & +1 \\ -(-2) & +6 & -(-6) \\ +(-1) & -4 & +(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -0{,}5 & -2 & -1{,}5 \end{pmatrix}.$$ ■

Aufgabe 3.4: Machen Sie die Probe zu Beispiel 3.10, indem Sie zeigen, dass

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_3$ ist!

Bemerkung 3.7: Die Formel (3.16) ist für das praktische Rechnen im Allgemeinen völlig ungeeignet. Effektive Berechnungsverfahren beruhen darauf, dass man das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ mit allgemeiner rechter Seite $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{x}$ auflöst: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}$ (unter Verwendung eines effektiven numerischen Algorithmus). Es ist dann $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ (vgl. Abschnitt 3.3.3).

Satz 3.14: Für reguläre (n, n)- Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gelten folgende Rechengesetze:

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}, \ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{3.17}$$

Beweis: Transponiert man beide Seiten der Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_n$, so erhält man nach Satz 3.11

$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_n^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_n$.

Diese Gleichung besagt, dass $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ die Kehrmatrix von $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ ist, und das ist die Aussage der ersten Beziehung von (3.17). Aus $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{E}_n$ folgt durch Multiplikation von links mit $\boldsymbol{A}^{-1}$: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{A}^{-1}$ und weitere Multiplikation von links mit $\boldsymbol{B}^{-1}$: $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$. Das ist die zweite Beziehung von (3.17). □

3.2.5 Rang einer Matrix

Der Begriff des Ranges einer Matrix steht in engem Zusammenhang mit Aussagen über die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (Abschnitt 3.3).

Definition 3.14: Unter dem **Rang** $r(\boldsymbol{A})$ der (m, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ versteht man die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$:

$r(\boldsymbol{A})$ = maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren
= maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren
$\le \min(m, n)$.