HANSER

Leseprobe

Siegfried Völkel, Horst Bach, Heinz Nickel, Jürgen Schäfer

Mathematik für Techniker

ISBN (Buch): 978-3-446-43968-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-43935-1

Inhalt

Vorwort

Die vorliegende 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Technikerausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen“ nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen“. Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen“ wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung“ wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion“ wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung“ wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Einführung in die Statistik“. Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuauflage wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen“ aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Technikerausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritzsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin

Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Technikerausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014 Die Verfasser

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Diese Beziehung kann ebenso wie *Gl. (5.11a)* zur Berechnung von Funktionswerten der Arkuskotangensfunktion benutzt werden. Weitere nützliche Beziehungen sind:

$$\pi = 4 \cdot \arctan 1 \tag{5.11c}$$

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \tag{5.11d}$$

Gl. (5.11c) folgt aus $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Gl. (5.11d) ergibt sich aus einer Formel der *Tabelle 4.4* in *Abschnitt 4.1.5*:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \text{ergibt} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\ \alpha}}\right)$$

mit $\alpha = \arcsin x$ folgt *Gl. (5.11d)*.

Kontrollfragen

5.56 Was ist die charakteristischste Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen?

5.57 Welcher Unterschied zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion ist am besten geeignet, die Graphen der beiden Funktionen voneinander zu unterscheiden?

5.58 Wo hat die Tangensfunktion ihre Polstellen?

5.59 Warum spielt die Kotangensfunktion in den Anwendungsfächern keine große Rolle?

5.60 Wie heißen die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen?

5.61 In welchen Bereichen liegen bei den Arkusfunktionen für negative Argumente x die Funktionswerte?

Aufgaben: *5.42* und *5.43*

5.9 Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen

Um Zusammenhänge oder Gesetzmäßigkeiten auch quantitativ richtig darstellen zu können, reichen die Funktionen in ihrer Grundform meist nicht aus. Sie müssen häufig durch passende Summanden oder Faktoren oder durch Verkettung, d. h. Verschachtelung modifiziert werden. Welchen Einfluss diese Modifikation auf die Lage und die Form der Funktionsgraphen hat, soll im Folgenden anhand eines Beispiels aus dem Bereich der Elektrotechnik dargestellt werden.

Die zeitliche Abhängigkeit der Spannung zwischen den Elektroden eines Kondensators mit der Kapazität C, der über einen Widerstand R mithilfe einer Gleichspannung U_0 aufgeladen wird, ist gegeben durch

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R\cdot C}}) \quad \text{(siehe \textit{Beispiel} 5.52)}$$

Bild 5.41 zeigt den grafischen Verlauf einer Kondensatoraufladung für $C = 4{,}7\,\mu\text{F}$, $R = 4{,}7\,\Omega$ und $U_0 = 10\,\text{V}$ im Bereich von $0 \leqq t \leqq 120\,\mu\text{s}$.

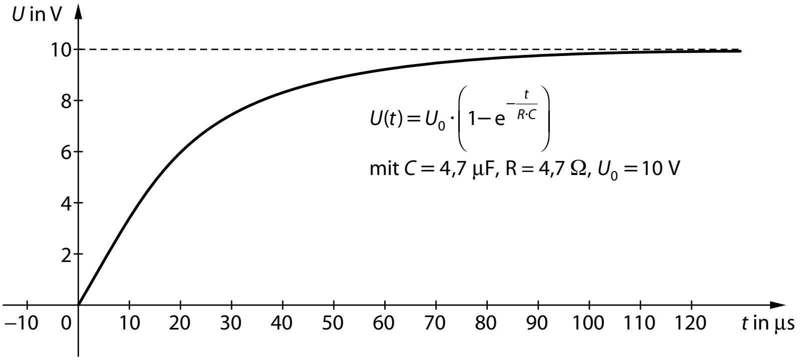


Bild 5.41

Die Funktion, die grundsätzlich einer Kondensatoraufladung zugrunde liegt, ist offensichtlich die e-Funktion (*Bild 5.42*).

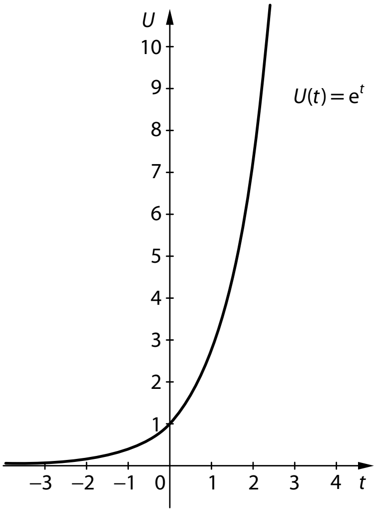


Bild 5.42

Diese e-Funktion soll nun Schritt für Schritt modifiziert werden, bis sie die Gestalt der Kurve der Kondensatoraufladung angenommen hat.

1. Schritt: Veränderung des Vorzeichens der Funktion, d. h. $U(t) = e^t$ wird modifiziert zu $U(t) = -e^t$.

Da bei der Multiplikation einer Funktion mit -1 jeder Funktionswert sein Vorzeichen ändert, gilt:

> Die Veränderung des Vorzeichens einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Spiegelung des Funktionsgraphen an der Abszisse.

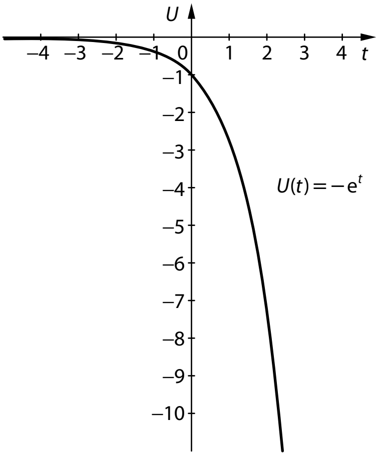


Bild 5.43

2. Schritt: Addition einer Zahl zu einer Funktion. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = -\,\mathrm{e}^t$ wird modifiziert zu $U(t) = -\,\mathrm{e}^t + 1 = 1 -\ \mathrm{e}^t$.

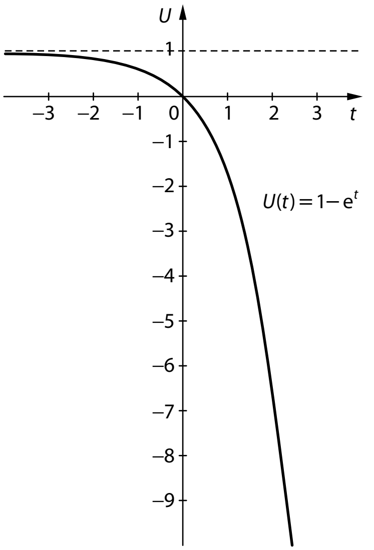


Bild 5.44

Der Graph dieser Funktion geht offenbar durch eine Verschiebung um eine Einheit nach oben hervor. Allgemein gilt:

> Die Addition einer Konstanten b zu einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen um b Einheiten nach oben $(b > 0)$ bzw. nach unten $(b < 0)$.

3. Schritt: Multiplikation einer Funktion mit einem positiven Wert. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = 1 -\ \mathrm{e}^t$ wird modifiziert zu $U(t) = U_0\left(1 - \mathrm{e}^t\right)$ mit $U_0 = 10\,\mathrm{V}$. Die Ordinate ist nun einheitenbehaftet (*Bild 5.45*).

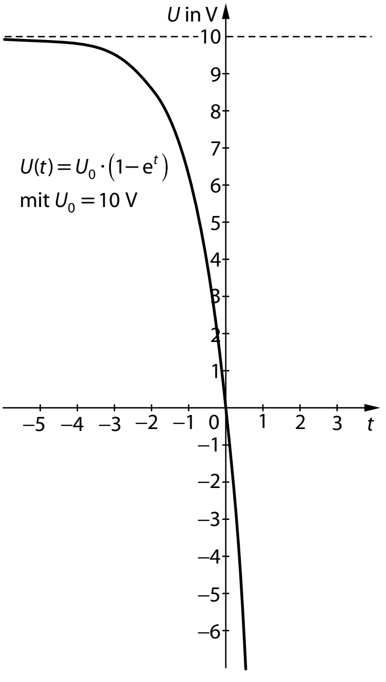


Bild 5.45

Offensichtlich wird die von uns betrachtete Funktion durch die Multiplikation mit $U_0 = 10\,\mathrm{V}$ in senkrechter Richtung stark gestreckt. Da jeder Funktionswert mit dem entsprechenden Faktor multipliziert wird, gilt allgemein:

> Durch die Multiplikation einer Funktion mit einem positiven Wert m wird der Funktionsgraph im kartesischen Koordinatensystem in senkrechter Richtung gestreckt ($m > 1$) bzw. gestaucht ($0 < m < 1$).

Anmerkung:

Die Multiplikation einer Funktion mit einer negativen Zahl kann als Hintereinanderausführung einer Vorzeichenveränderung und einer Multiplikation mit einer positiven Zahl angesehen werden: Zur Streckung bzw. Stauchung kommt in diesem Fall noch eine Spiegelung an der Abszisse.

4. Schritt: Veränderung des Vorzeichens des Arguments, d. h. $U(t) = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{t}\right)$ wird modifiziert zu $U(t) = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)$.

Dem *Bild 5.46* kann entnommen werden:

> Die Veränderung des Vorzeichens des Arguments einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Spiegelung des Funktionsgraphen an der Ordinate.

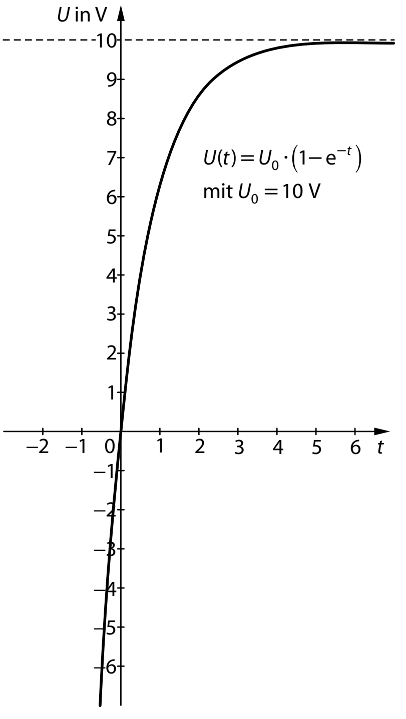


Bild 5.46

5. Schritt: Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einem positiven Wert. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)$ wird modifiziert, indem das Argument t mit dem positiven Wert $\dfrac{1}{R \cdot C}$ multipliziert wird: $U(t) = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$ mit $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R = 4{,}7\,\Omega$ und $C = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$. Nun ist die Abszisse ebenfalls einheitenbehaftet, das Argument t steht für die Zeit, hier gemessen in µs (*Bild 5.47*).

Offenbar liegt in diesem Fall eine Verzerrung in waagerechter Richtung vor. Allgemein gilt:

Durch die Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einem positiven Wert k wird der Funktionsgraph im kartesischen Koordinatensystem in waagerechter Richtung gestreckt ($0 < k < 1$) bzw. gestaucht ($k > 1$).

Anmerkung:

Die Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einer negativen Zahl kann als Hintereinanderausführung einer Vorzeichenveränderung und einer Multiplikation mit einer positiven Zahl angesehen werden: Zur Streckung bzw. Stauchung kommt in diesem Fall noch eine Spiegelung an der Ordinate.

Offenbar stimmen für $t \geqq 0$ die Graphen der Funktionen aus *Bild 5.41* und *Bild 5.47* überein. Hiermit wurde exemplarisch gezeigt, wie sich der Graph einer modifizierten Funktion aus dem Graphen der Grundfunktion entwickeln lässt.

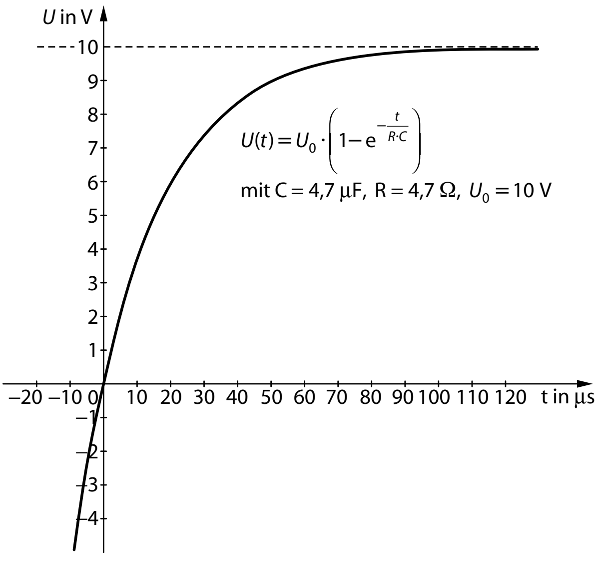


Bild 5.47

Eine weitere Modifikation tritt in diesem Beispiel nicht auf, ist aber in anderen Zusammenhängen von großer Bedeutung (siehe *Beispiele* 5.56 bis 5.58): Was geschieht, wenn man zum Argument einer Funktion eine Zahl addiert?

> Die Addition einer Zahl c zum Argument einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen um c Einheiten nach links ($c > 0$) bzw. nach rechts ($c < 0$).

Beispiele

5.56 Die Parabel $y = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 10$ geht aus der Normalparabel $y = x^2$ durch folgende Modifikationen hervor (siehe *Bild* 5.48):

Multiplikation der Funktion mit $\frac{1}{4}$ (Stauchung in senkrechter Richtung), Änderung des Vorzeichens der Funktion (Spiegelung an der Abszisse), Addition der -3 zum Argument (Verschiebung um drei Einheiten nach links) und Addition der 10 zur Funktion (Verschiebung um 10 Einheiten nach rechts).

7.9 Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung

Der Verlauf der Kurve einer Funktion musste bisher mittels einer Wertetabelle ermittelt werden. Die Differenzialrechnung gibt die Möglichkeit, die Untersuchung von Funktionen zu vereinfachen. Die geometrische Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung soll anhand der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$$

erklärt werden. Die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion ist

$$\begin{aligned} y' &= x^2 - 6x + 8, \\ y'' &= 2x - 6, \\ y''' &= 2. \end{aligned}$$

Betrachtet man den Verlauf der Kurve $y = f(x)$ (vgl. *Bild* 7.8*a*), erkennt man, dass diese mit wachsenden x-Werten bis zum Punkt H wächst. Der Anstiegswinkel α der Tangente liegt im Intervall $-\infty < x < x_\mathrm{H}$ zwischen 0° und 90°, und es gilt $y' = f'(x) > 0$ (vgl. auch *Bild* 7.8*b*). Vom Punkt H bis zum Punkt T fällt die Kurve. Der Anstiegswinkel α der Tangente liegt im Intervall $x_\mathrm{H} < x < x_\mathrm{T}$ zwischen −90° und 0°, und es gilt $y' = f'(x) < 0$ (vgl. auch *Bild* 7.8*b*). Im Intervall $x_\mathrm{T} < x < \infty$ wächst die Kurve wieder, und es gilt $y' = f'(x) > 0$.

Das Vorzeichen der ersten Ableitung einer Funktion gibt somit Auskunft, ob die Kurve wächst oder fällt.

Definition 7.4

Die Kurve einer im Intervall I differenzierbaren Funktion f **wächst** bzw. **fällt monoton**, wenn für alle x aus diesem Intervall I gilt $y' = f'(x) \geqq 0$ bzw. $y' = f'(x) \leqq 0$. Der zugehörige Kurvenbogen heißt **wachsender** bzw. **fallender Monotoniebogen**.

Für das Zeichnen einer Kurve ist es notwendig, neben dem Anstieg der Kurve die Art ihrer Krümmung zu bestimmen. Im *Bild* 7.9 sind Kurvenstücke gezeichnet, die deutlich machen, dass es zwei Arten wachsender bzw. fallender Kurven gibt.

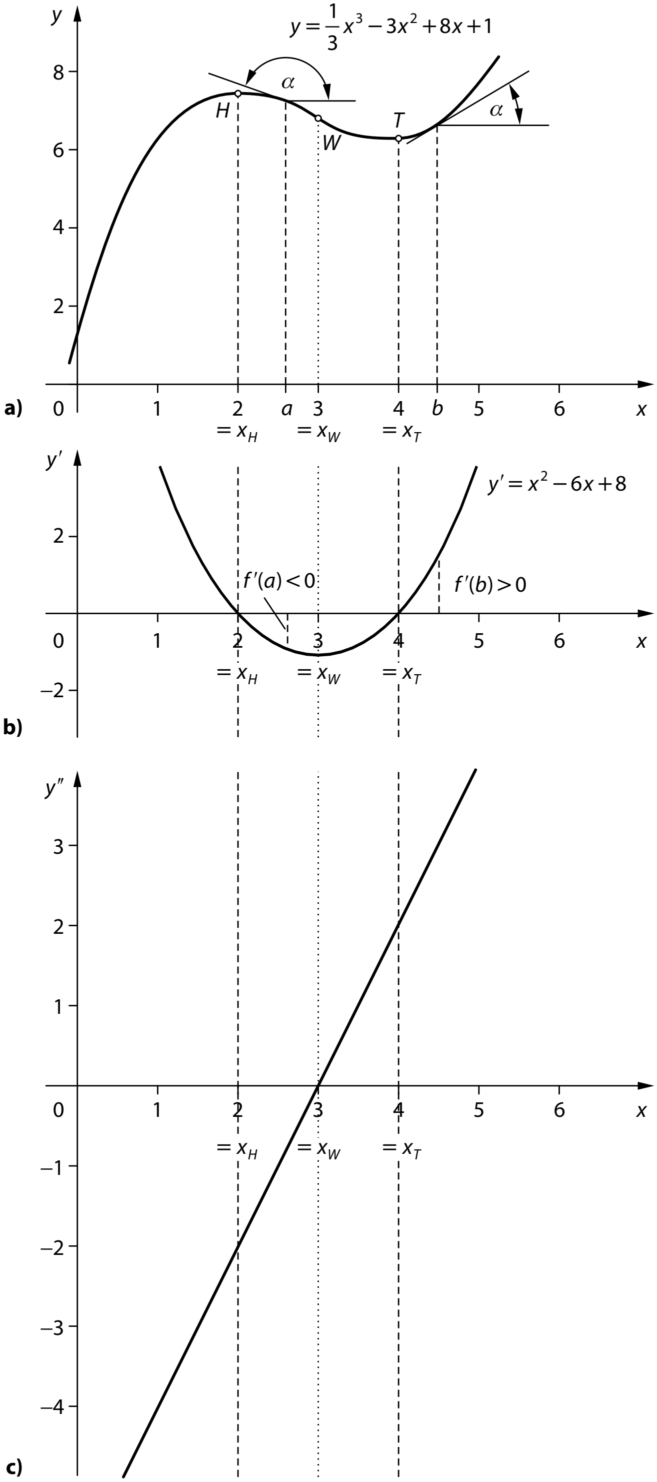
Bei wachsenden Funktionen kann die Tangente oberhalb (vgl. *Bild* 7.9*a*) bzw. unterhalb (vgl. *Bild* 7.9*b*) der Kurven liegen. Entsprechendes stellt man auch für die fallenden Kurvenstücke fest (vgl. *Bild* 7.9*c* und *d*. Liegt die Tangente **unterhalb** bzw. **oberhalb** der Kurve, so sagt man, die Kurve ist von unten **konvex** (erhaben) bzw. von unten **konkav** (hohl). Die Kurvenbögen nennt man **Konvex**- bzw. **Konkavbogen**.

Wendet man diese Betrachtungen auf die im *Bild* 7.8 dargestellte Funktion an, folgt:

Im Intervall $0 \leqq x < x_\mathrm{W}$ ist die Kurve $y = f(x)$ konkav. Die zweite Ableitung $y'' = f''(x)$ ist in diesem Intervall negativ. Im Intervall $x_\mathrm{W} < x \leqq 5$ ist die Kurve $y = f(x)$ konvex. Die zweite Ableitung ist in diesem Intervall positiv. Dieses Ergebnis gilt allgemein.

Definition 7.5

Eine im Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex bzw. konkav, wenn für die zweite Ableitung $y'' = f''(x) > 0$ bzw. $y'' = f''(x) < 0$ gilt.



$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$
α
α
H
W
T
y
8
6
4
2
0
1
2
a
3
4
b
5
6
x
$= x_H$
$= x_W$
$= x_T$
a)
y'
$y' = x^2 - 6x + 8$
$f'(a) < 0$
$f'(b) > 0$
b)
y''
c)

Bild 7.8

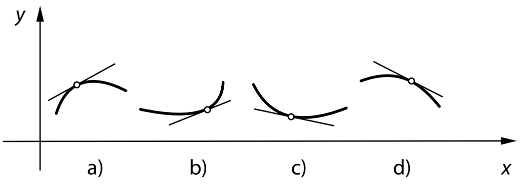


Bild 7.9

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt somit Auskunft über die Krümmungsart der Kurve.

Werden naturwissenschaftliche, technische bzw. ökonomische Zusammenhänge durch Funktionen beschrieben, ist die Ermittlung von charakteristischen Punkten der zugehörigen Kurve oft von besonderem Interesse. Betrachtet man im *Bild 7.10* den Punkt H, so erkennt man, dass seine Ordinate, d. h. der Funktionswert $f(x_{\mathrm{H}})$, größer ist als die Funktionswerte in der näheren Umgebung U von x_{H}. (Eine Umgebung von x_{H} ist ein offenes Intervall $U = (x_1;\ x_2)$, das x_{H} enthält: $x_{\mathrm{H}} \in U$, wobei die Breite des Intervalls $x_2 - x_1$ beliebig klein sein kann, vgl. *7.1*). Die Funktion nimmt an der Stelle x_{H} im Vergleich zu anderen Funktionswerten in der näheren Umgebung von $y = f(x)$ einen Höchstwert an. Dieser Wert $f(x_{\mathrm{H}})$ wird (**relatives**) **Maximum** von $y = f(x)$ genannt. Entsprechend gilt für den Punkt T, dass seine Ordinate, d. h. der Funktionswert $f(x_{\mathrm{T}})$, kleiner ist als die Funktionswerte in der näheren Umgebung U von x_{T}. Der Wert $f(x_{\mathrm{T}})$ heißt (**relatives**) **Minimum** von $y = f(x)$ (vgl. *Bild 7.10*).

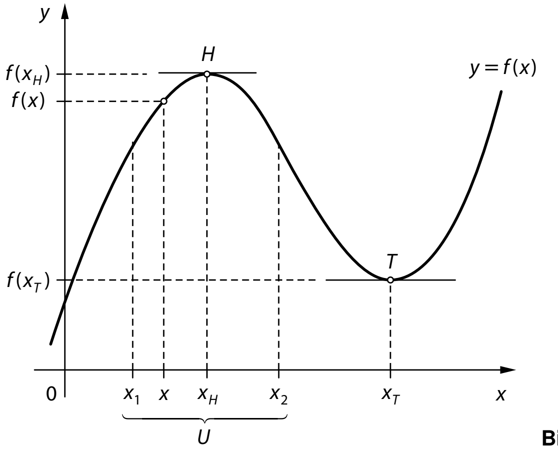


Bild 7.10

Definition 7.6

Die Funktion f hat in $\begin{Bmatrix} x_{\mathrm{H}} \\ x_{\mathrm{T}} \end{Bmatrix}$ eine (relative) $\begin{Bmatrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{Bmatrix}$, wenn eine Umgebung

$U = (x_1;\ x_2)$ von $\begin{Bmatrix} x_{\mathrm{H}} \\ x_{\mathrm{T}} \end{Bmatrix}$ existiert,

sodass für alle $x \in U$ $\begin{Bmatrix} f(x) \leqq f(x_{\mathrm{H}}) \\ f(x) \geqq f(x_{\mathrm{T}}) \end{Bmatrix}$ ist.

Der Funktionswert $\begin{Bmatrix} y_{\mathrm{H}} = f(x_{\mathrm{H}}) \\ y_{\mathrm{T}} = f(x_{\mathrm{T}}) \end{Bmatrix}$ heißt (relatives) $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ von f.

Minimum und Maximum werden auch unter dem Begriff Extremum zusammengefasst. Die Punkte H und T sind (relative) Extrempunkte, speziell (relativer) Maximum- oder Hochpunkt H bzw. (relativer) Minimum- oder Tiefpunkt T. Zu beachten ist, dass die Extremwerte nur in einem bestimmten Intervall Höchst- und Tiefstwerte sind.

Aus dem *Bild 7.11* wird ersichtlich, dass der Funktionswert an der Stelle $x = c$ kleiner ist als der Funktionswert an der Stelle $x = g$, obwohl sich an der Stelle $x = c$ ein relatives Maximum befindet. An den Stellen $x = b$ und $x = d$ liegt ein relatives Minimum vor. Daraus folgt, dass Extremwerte nicht die absolut größten bzw. kleinsten Funktionswerte sind. Sie sind nur die größten bzw. kleinsten Werte einer Funktion bezüglich ihrer unmittelbaren Umgebung. Deshalb bezeichnet man sie auch als relative Extremwerte. Gilt für den gesamten Definitionsbereich $f(x_\mathrm{H}) \geqq f(x)$ bzw. $f(x_\mathrm{T}) \leqq f(x)$ so spricht man von einem **absoluten Maximum** oder **absoluten Minimum**. Da absolute Extremwerte hier nicht behandelt werden, wird der Zusatz „relativ" nachfolgend weggelassen.

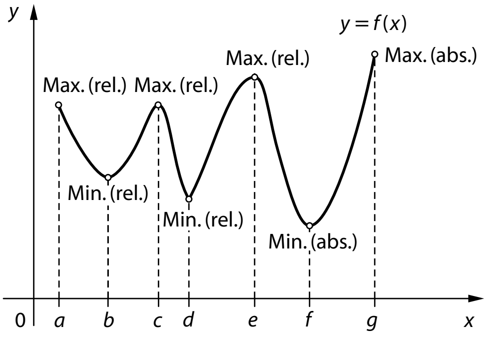


Bild 7.11

Betrachtet man im *Bild 7.11* alle die Punkte der Kurve, die den Extrema der Funktion f entsprechen und keine Randpunkte des Definitionsbereichs sind, so haben sie eine charakteristische Eigenschaft: Wenn die Tangente an den Graphen existiert, so verläuft sie parallel zur x-Achse, d. h., dass die Ableitung von f an den Extremstellen gleich 0 ist. Allgemein gilt folgender Satz:

Satz 7.2

Wenn eine Funktion f in $x = x_\mathrm{E}$ eine Extremstelle hat und f in einer Umgebung U von x_E differenzierbar ist so gilt $f'(x_\mathrm{E}) = 0$.

Die Bedingung $f'(x_\mathrm{E}) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extremwertes von f an der Stelle $x = x_\mathrm{E}$. Nur die Lösungen der Gleichung $f'(x_\mathrm{E}) = 0$ können Extremstellen der Funktion f sein. Darunter können aber auch Lösungen sein, die keine Extremstellen von f sind.

Beispiel

7.26 $y = (x-1)^3 + 1$.

Es ist $y' = 3(x-1)^2$. Die Gleichung $3(x-1)^2 = 0$ liefert die Lösung $x_0 = 1$. Die Funktion f hat dennoch an der Stelle $x_0 = 1$ kein Extremum. In jeder Umgebung U von $x = 1$ gibt es sowohl Funktionswerte, die kleiner als $f(1)$, als auch größer als $f(1)$ sind (vgl. *Bild 7.12*).

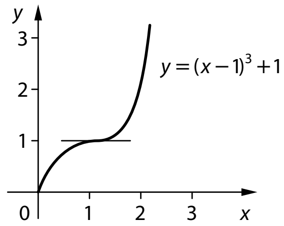


Bild 7.12

■

Zur Bestimmung der Extrema einer Funktion muss deshalb ein ergänzendes Kriterium gefunden werden, das es gestattet, die tatsächlichen Extrema einer Funktion auszusondern. Aus den *Bildern 7.8* und *7.10* erkennt man, dass in den Extrema jeweils die Funktion f ihr Monotonieverhalten ändert. Diese Eigenschaft besitzt die im *Bild 7.12* dargestellte Funktion f nicht. Sie hat deshalb in $f(1)$ kein Extremum. Allgemein lässt sich für den Wechsel des Monotonieverhaltens einer Funktion f an den Stellen ihrer Extrema folgender Satz formulieren (hinreichende Bedingung für Extrema).

Satz 7.3

Ist eine Funktion f im Intervall I zweimal differenzierbar und ist

$$f^{'}(x) = 0 \left\{ \begin{matrix} f''(x_E) < 0 \\ f''(x_E) > 0 \end{matrix} \right\}, \text{ dann ist } x_E \text{ eine } \left\{ \begin{matrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{matrix} \right\}.$$

Der Fall $f'(x) = f''(x) = 0$ wird zunächst ausgeschlossen.

Betrachtet man den Punkt W im *Bild 7.8a*, erkennt man, dass die Kurve dort ihren Krümmungssinn ändert. Deshalb wird dieser Punkt **Wendepunkt** genannt. Der Wendepunkt trennt ein konvexes Kurvenstück von einem konkaven Kurvenstück. Die Funktion $y' = f(x)$ besitzt an der Stelle x_W ein Minimum (vgl. *Bild 7.8b*). Der Anstiegswinkel der Tangente beträgt an der Stelle x_W gleich 0^0. Daraus folgt, dass $f''(x_W) = 0$ sein muss (vgl. *Bild 7.8b* und *c*). Im Allgemeinen muss nach der hinreichenden Bedingung über Extremwerte die übernächste Ableitung, also $f'''(x) \neq 0$ sein. Die dritte Ableitung von $y = f(x)$ an dieser Stelle ist $y''' = 2$.

Als notwendige Bedingung für das Auftreten eines Wendepunktes von einer Funktion $y = f(x)$ in x_W lässt sich folgender Satz formulieren.

Satz 7.4

Ist eine Funktion f in einer Umgebung U von x_W zweimal differenzierbar und ist W ein **Wendepunkt** der zu f gehörigen Kurve, dann ist $f''(x_W) = 0$.

Die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendpunktes lautet:

Satz 7.5

Ist eine Funktion f in einer Umgebung U von x_W zweimal differenzierbar und ist $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, dann ist W ein **Wendepunkt** der zugehörigen Kurve.

Ein Wendepunkt mit waagerechter Wendetangente heißt **Stufen**- oder **Terrassenpunkt** (vgl. *Bild 7.12*). Für ihn lautet die notwendige Bedingung $y'(x_W) = 0$ und $y''(x_W) = 0$.

Beispiel

7.27 Die Funktion $y = f(x) = 2x^3 + 1$ soll auf Extrem- und Wendepunkte untersucht werden.

Lösung: $y' = 6x^2, \quad y'' = 12x, \quad y''' = 12$
Aus $y' = 0$ folgt $6x^2 = 0$, $x_{1/2} = 0$.
Setzt man den errechneten x-Wert in die zweite Ableitung ein, ergibt sich $y''(0) = 0$. Eine Entscheidung über das Vorliegen eines Extremwertes kann noch nicht getroffen werden. Da die dritte Ableitung $y''' \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $x_{1/2}$ ein Wendepunkt vor. Die Koordinaten lauten: $W(0; 1)$ (horizontaler Wendepunkt). Da aber auch $y'(0) = 0$ ist handelt es sich um einen Stufen- oder Terrassenpunkt (vgl. *Bild 7.13*).

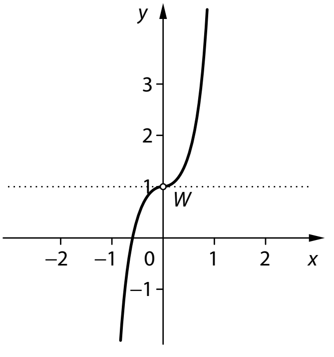


Bild 7.13 ■

Kontrollfragen

7.11 Wann wächst bzw. fällt eine im Intervall I differenzierbare Funktion f?

7.12 Wie verhält sich die Kurve einer Funktion f in der Umgebung einer Extremstelle?

7.13 Welcher Unterschied besteht zwischen einem relativen und einem absoluten Maximum?

7.14 Geben Sie die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Extremwertes einer Funktion f an!

7.15 Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes einer Funktion f an?

7.16 Wann ist eine im Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f konvex bzw. konkav?

■ 7.10 Kurvendiskussion

In den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Ökonomie werden viele Zusammenhänge mit Funktionen beschrieben. Eine in der Praxis häufige Aufgabenstellung ist, sich für eine gegebene Funktion schnell einen Überblick über den Verlauf der Kurve der Funktion zu verschaffen. Eine Wertetabelle ist dazu nicht immer geeignet, da solche charakteristischen Punkte der Kurve, wie z. B. die Extrempunkte, im Allgemeinen nicht erfasst werden. Mithilfe der Differenzialrechnung kann man meist recht schnell die charakteristischen Punkte und Eigenschaften der Kurve der Funktion erfassen und sie im Koordinatensystem darstellen. Die Untersuchungen zur Gewinnung des Bildes einer Funktion nennt man **Kurvendiskussion**.

12.2.3 Das Skalarprodukt

Aus den Koordinaten zweier Vektoren lässt sich der Winkel bestimmen, den diese Vektoren miteinander einschließen.

Beispiel

12.10 Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Mit den Bezeichnungen aus *Bild 12.14* und *Gl. (4.10)* gilt:

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ &= \frac{a_1}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_1}{|\vec{b}|} + \frac{a_2}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_2}{|\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 6 + 6 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2}} \\ &= \frac{30}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{40}} = \frac{30}{\sqrt{1\,800}} = \frac{30}{\sqrt{2} \cdot 30} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \delta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ \end{aligned}$$

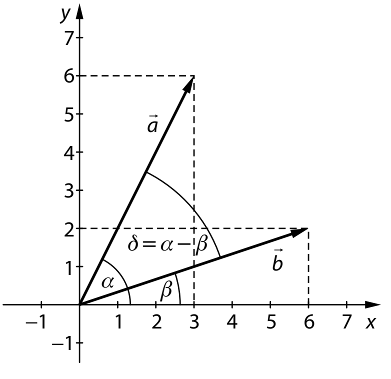


Bild 12.14

Allgemein gilt:

Der Kosinus des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Winkels $\varphi (0^\circ \leqq \varphi \leqq 180^\circ)$ lässt sich folgendermaßen bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{bzw.} \tag{12.7a}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \tag{12.7b}$$

Beispiele

12.11 a) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $3\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach *Gl. (12.7b)* ist

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot(-6)+3\cdot 9+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+9^2+(-3)^2}} = \frac{12+27+3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{126}} = \frac{42}{\sqrt{1764}} = \frac{42}{42} = 1$$

also $\varphi = \arccos(1) = 0°$.

Der Winkel von $0°$ war zu erwarten, da ein Vektor und sein mit einem positiven Faktor gebildetes Vielfaches die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung haben.

b) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $-6\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach *Gl. (12.7a)* ist

$$\cos\varphi = \frac{0{,}5\cdot(-3)+(-1{,}5)\cdot 9}{\sqrt{(0{,}5)^2+(-1{,}5)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+9^2}} = \frac{-1{,}5-13{,}5}{\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{90}} = \frac{-15}{\sqrt{225}} = \frac{-15}{15} = -1$$

also $\varphi = \arccos(-1) = 180°$.

Dieses Ergebnis war ebenfalls zu erwarten, da ein Vektor und sein mit einem negativen Faktor gebildetes Vielfaches die gleiche Richtung, aber die entgegengesetzte Orientierung haben und somit einen gestreckten Winkel bilden.

c) Der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach *Gl. (12.7b)* ist

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 3+(-4)\cdot 3+1\cdot 6}{\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+6^2}} = \frac{6-12+6}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{54}} = 0$$

also $\alpha = \arccos(0) = 90°$.

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bilden also einen rechten Winkel, d. h. sie stehen senkrecht aufeinander.

12.12 Es ist der Winkel α im Dreieck zu berechnen, das durch die Punkte $A(-4;\,-1)$, $B(3;\,-3)$ und $C(2;\,4)$ gebildet wird (siehe *Bild 12.15*).

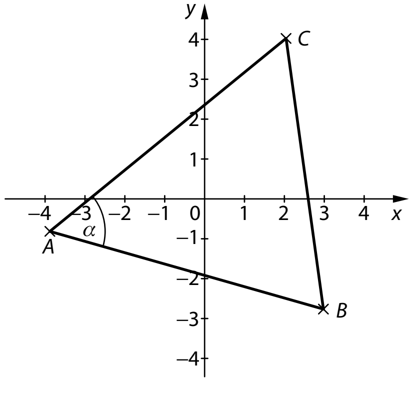


Bild 12.15

Lösung: Gesucht ist der Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist nach *Gl. (12.7a)*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6 \cdot 7 + 5 \cdot (-2)}{\sqrt{6^2 + 5^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-2)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{53}}\right) = \arccos\left(\frac{32}{56{,}86}\right)$$
$$= \arccos(0{,}562\,9) = 55{,}7^\circ$$

12.13 Für eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundseite ($a = 2\,\text{m}$) und einer Höhe von $h = 2{,}5\,\text{m}$ ist der Winkel σ zu berechnen, den die Seitenlinien an der Pyramidenspitze miteinander bilden (siehe *Bild 12.16*).

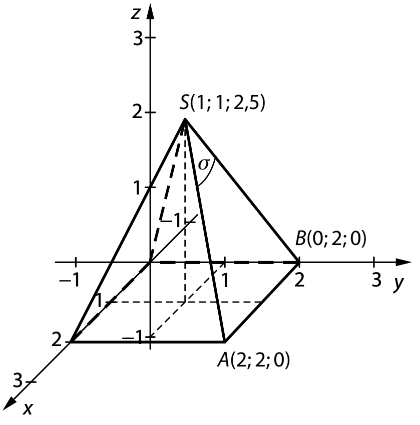


Bild 12.16

Lösung: Gesucht ist der Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$. Dann ist nach *Gl. (12.7b)*

$$\sigma = \arccos\left(\frac{-1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2{,}5 \cdot 2{,}5}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2}}\right) = \arccos\left(\frac{6{,}25}{\sqrt{8{,}25} \cdot \sqrt{8{,}25}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{6{,}25}{8{,}25}\right) = \arccos(0{,}757\,6) = 40{,}7^\circ$$ ■

Betrachtet man zwei **Einheitsvektoren** (d. h. Vektoren mit dem Betrag 1), so ist der Kosinus des Winkels offenbar nur durch den Zähler von *Gl. (12.7a)* bzw. (*12.7b*) gegeben. Diese Summe erzeugt aus den Koordinaten zweier Vektoren einen Skalar (eine reelle Zahl). Daher kann man diese Verknüpfung als eine Abbildung auffassen, die zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Diese Abbildung nennt man **Skalarprodukt** (manchmal auch „**inneres Produkt**“, seltener **Punktprodukt**) und sie wird folgendermaßen geschrieben:

Definition 12.2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Anmerkungen:

- Das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird manchmal auch durch spitze Klammern gekennzeichnet: $< \vec{a}, \vec{b} >$
- Da diese Definition des Skalarprodukts sich auf die Koordinaten der Vektoren bezieht, nennt man sie die **Koordinatenform des Skalarprodukts**.
- Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Quadrat seines Betrages: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

  Aus diesem Grund ist das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist genau dann 0, wenn der Vektor selbst der Nullvektor ist: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- Der Ausdruck $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ ist sinnlos, sowohl in der Klammerung $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ als auch in der Klammerung $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$, da das Skalarprodukt nicht aus einem Vektor und einer reellen Zahl gebildet werden kann.

Da das Skalarprodukt auf die Multiplikation und die Addition reeller Zahlen zurückgeführt wird, ist es **kommutativ**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Aus dem gleichen Grund gilt für das Skalarprodukt das **Assoziativgesetz** in folgendem Sinne: $r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$, $r \in \mathbb{R}$.

Ebenso gilt für das Skalarprodukt das **Distributivgesetz**: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Beispiel

12.14 a) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 = -2 - 12 = -14$$

b) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot 6 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = -6 - 8 + 14 = 0$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass das Skalarprodukt den Wert 0 annehmen kann, ohne dass einer der beiden beteiligten Vektoren der Nullvektor ist. ■

Vergleicht man die *Gln. (12.7a)* bzw. (12.7b) mit der *Definition 12.2*, so erkennt man, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren dividiert durch den Betrag beider Vektoren dem Kosinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels gleich ist:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \text{oder} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \quad (\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}) \tag{12.8}$$

wenn φ ($0^\circ \leqq \varphi \leqq 180^\circ$) der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

Anmerkungen:

- Da diese Schreibweise des Skalarprodukts sich nicht auf die Koordinaten der Vektoren bezieht, nennt man sie die **koordinatenfreie Form des Skalarprodukts**.
- Die *Gl. (12.8)* zeigt, dass das Skalarprodukt durch den Betrag zweier Vektoren und den durch sie eingeschlossenen Winkel φ eindeutig bestimmt ist.
- Für $\vec{a} = \vec{b}$ ergibt sich auch aus dieser Form des Skalarprodukts: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$, also $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Offenbar ist das Skalarprodukt genau dann 0, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist oder der Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels 0 ist ($\cos\varphi = 0$). Letzteres ist genau dann der Fall, wenn φ ein ungeradzahliges Vielfaches von 90° ist, also wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als **Orthogonalitätsbedingung**:

Zwei Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad (\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}) \tag{12.9}$$

Beispiele

12.15 Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus *Beispiel 12.14 b* stehen offenbar senkrecht aufeinander.

12.16 Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}$, der zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Lösung: Nach der Orthogonalitätsbedingung (*Gl. (12.9)*) muss für die Koordinaten des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ gelten:

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1 + 4c_3 = 0, \quad \text{sowie} \tag{1}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = 2c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \tag{2}$$

Aus (1) folgt: $c_1 = -4c_3$, eingesetzt in (2) ergibt sich: $-8c_3 - 2c_2 + 3c_3 = -2c_2 - 5c_3 = 0$. Diese Gleichung ist offenbar für $c_2 = 5$ und $c_3 = -2$ erfüllt, für c_1 ergibt sich dann: $c_1 = 8$.

Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}8\\5\\-2\end{pmatrix}$ und alle seine Vielfachen stehen also senkrecht sowohl auf dem gegebenen Vektor $\vec{a}$ als auch auf dem gegebenen Vektor $\vec{b}$.

12.17 Gesucht ist die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Seitenlängen $a = 2$ cm, $b = 3$ cm und $c = 2{,}5$ cm sowie der Winkel, unter dem sich jeweils zwei Raumdiagonalen schneiden.

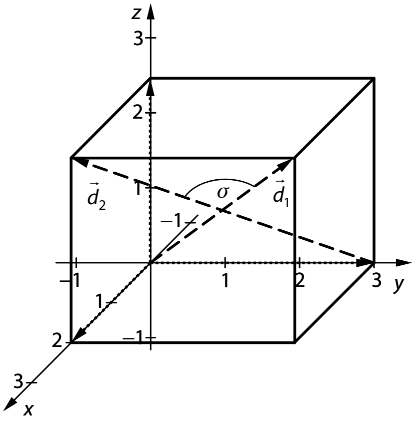


Bild 12.17

Lösung: Nach *Bild 12.17* lassen sich die Raumdiagonalen folgendermaßen als Vektoren darstellen:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist $\left|\vec{d}_1\right| = \left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{4 + 9 + 6{,}25} = \sqrt{19{,}25} = 4{,}39$, d. h. die Raumdiagonalen haben eine Länge von 4,39 cm.

Für den Schnittwinkel σ gilt nach *Gl. (12.8)*:

$$\cos\sigma = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right| \cdot \left|\vec{d}_2\right|} = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 6{,}25}{\sqrt{19{,}25} \cdot \sqrt{19{,}25}} = \frac{1{,}25}{19{,}25} = 0{,}065 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \arccos(0{,}065) = 86{,}3^\circ$$

12.18 Zu zeigen ist, dass jeder Umfangswinkel über dem Durchmesser eines Kreises ein rechter ist (Satz des Thales).

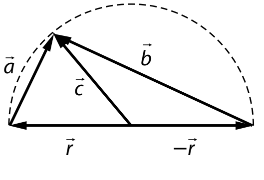


Bild 12.18

Lösung: Mit den Bezeichnungen von *Bild 12.18* gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{c} - \vec{r}\right) \cdot \left(\vec{c} + \vec{r}\right) = \vec{c}^2 - \vec{r}^2 = |\vec{c}|^2 - |\vec{r}|^2 = 0$, da $|\vec{c}| = |\vec{r}|$ ($\vec{c}$ ist ein Radius im Kreis!). Wegen der Orthogonalitätsbedingung (*Gl. (12.9)*) bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ also einen rechten Winkel. ■

Sachwortverzeichnis

I

K

L

M

N

O