



Leseprobe

Siegfried Völkel, Horst Bach, Heinz Nickel, Jürgen Schäfer

Mathematik für Techniker

ISBN (Buch): 978-3-446-43968-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-43935-1

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43968-9>

sowie im Buchhandel.

Inhalt

1	Rechenoperationen	13
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik	13
1.1.0	Vorbemerkung	13
1.1.1	Begriff der Menge	13
1.1.2	Relationen zwischen Mengen	16
1.1.3	Operationen mit Mengen	19
1.2	Zahlenbereiche	23
1.2.0	Vorbemerkung	23
1.2.1	Bereich der reellen Zahlen und seine Teilbereiche	23
1.2.2	Zahlensysteme	25
1.2.3	Intervalle, Absoluter Betrag, Runden von Zahlen	27
1.3	Rechenoperationen erster und zweiter Stufe	32
1.3.0	Vorbemerkung	32
1.3.1	Grundbegriffe	32
1.3.2	Rechenoperationen mit Zahlen	34
1.3.3	Algebraische Summen	35
1.3.4	Bruchrechnung	39
1.3.5	Proportionen	44
1.3.6	Summenzeichen	49
1.4	Rechenoperationen dritter Stufe	51
1.4.0	Vorbemerkung	51
1.4.1	Rechnen mit Potenzen und Wurzeln	51
1.4.2	Rechnen mit Logarithmen	61
1.4.3	Potenz eines Binoms	68
1.5	Aufgaben	71
1.6	Lösungen	80
2	Gleichungen und Ungleichungen	86
2.1	Gleichungen mit einer Variablen	86
2.1.0	Vorbemerkung	86
2.1.1	Grundbegriffe	86
2.1.2	Lösen von algebraischen Gleichungen	90
2.1.3	Lösen von transzendenten Gleichungen	99
2.1.4	Lösen von Gleichungen durch Näherungsverfahren	104
2.2	Ungleichungen	110
2.2.0	Vorbemerkung	110
2.2.1	Grundbegriffe	110
2.2.2	Einfache Typen linearer Ungleichungen	111
2.3	Lineare Gleichungssysteme	113
2.3.0	Vorbemerkung	113

2.3.1	Herkömmliche Lösungsverfahren	114
2.3.2	Lösbarkeitsbetrachtungen	117
2.3.3	Gaußscher Algorithmus	120
2.3.4	Determinantenverfahren	125
2.4	Aufgaben	131
2.5	Lösungen	138

3 Geometrie **143**

3.1	Planimetrie	143
3.1.0	Vorbemerkung	143
3.1.1	Grundbegriffe	143
3.1.2	Winkel an sich schneidenden Geraden	146
3.1.3	Bewegungen in der Ebene, Kongruenz, Symmetrie	147
3.1.4	Grundkonstruktionen	151
3.1.5	Ähnlichkeit	154
3.1.6	Allgemeines Dreieck	156
3.1.7	Rechtwinkliges, gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	163
3.1.8	Viereck	166
3.1.9	Regelmäßiges n -Eck	168
3.1.10	Kreis	170
3.1.11	Flächeninhalte	174
3.2	Stereometrie	180
3.2.0	Vorbemerkung	180
3.2.1	Quader	181
3.2.2	Prisma und Pyramide	183
3.2.3	Prismatoid	188
3.2.4	Zylinder und Kegel	190
3.2.5	Cavalierisches Prinzip	195
3.2.6	Kugel und Kugelteile	195
3.3	Aufgaben	200
3.4	Lösungen	208

4 Trigonometrie **215**

4.1	Goniometrie	215
4.1.0	Vorbemerkung	215
4.1.1	Winkelmessung	215
4.1.2	Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	216
4.1.3	Winkelfunktionen für beliebige Winkel	222
4.1.4	Quadrantenrelationen	225
4.1.5	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels ..	231
4.1.6	Additionstheoreme	233
4.2	Dreiecksberechnung	237
4.2.1	Allgemeines	237
4.2.2	Sinus- und Kosinussatz	238
4.2.3	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	244
4.2.4	Weitere Anwendungen	246
4.3	Aufgaben	252
4.4	Lösungen	258

5	Funktionen	263
5.0	Vorbemerkung	263
5.1	Der Funktionsbegriff	263
5.1.1	Die Definition einer Funktion	263
5.1.2	Darstellungsformen von Funktionen	264
5.1.3	Eigenschaften von Funktionen	269
5.1.4	Die Umkehrfunktion	271
5.2	Lineare Funktionen (Geraden)	274
5.2.1	Die analytischen Darstellungsarten linearer Funktionen	274
5.2.2	Die lineare Funktion und ihre Umkehrfunktion	277
5.2.3	Lagebeziehungen zwischen Geraden	279
5.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	283
5.3.1	Die Darstellungsarten quadratischer Funktionen	283
5.3.2	Die Umwandlung zwischen den Darstellungsarten quadratischer Funktionen	288
5.3.3	Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion	291
5.4	Potenz- und Wurzelfunktionen	293
5.4.1	Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften	293
5.4.2	Wurzelfunktionen und ihre Eigenschaften	295
5.5	Ganzrationale Funktionen	296
5.6	Gebrochenrationale Funktionen	300
5.7	Exponential- und Logarithmusfunktionen	303
5.7.1	Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften	303
5.7.2	Logarithmusfunktionen und ihre Eigenschaften	306
5.8	Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	307
5.9	Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen	313
5.10	Bestimmung von Funktionsgleichungen	322
5.11	Aufgaben	326
5.12	Lösungen	333
6	Zahlenfolgen	341
6.0	Vorbemerkung	341
6.1	Grundbegriffe	341
6.2	Arithmetische Folgen	344
6.3	Geometrische Folgen	348
6.4	Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge	350
6.5	Grenzwert einer Zahlenfolge	355
6.6	Grenzwert einer Funktion	358
6.6.1	Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$	358
6.6.2	Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$	362
6.7	Aufgaben	363
6.8	Lösungen	366

7	Differenzialrechnung	368
7.0	Vorbemerkung	368
7.1	Grundbegriffe	368
7.2	Ableitung der Potenzfunktion	373
7.3	Ableitung einer konstanten Funktion und einer Funktion mit konstantem Faktor	375
7.4	Ableitung einer Summe von Funktionen	375
7.5	Differenzial einer Funktion	376
7.6	Weitere Grundregeln der Differenzialrechnung	380
7.6.1	Ableitung eines Produktes von Funktionen	380
7.6.2	Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen	381
7.7	Regeln für die Ableitung weiterer Funktionen	383
7.8	Höhere Ableitungen	385
7.9	Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung	386
7.10	Kurvendiskussion	391
7.11	Extremwertaufgaben	397
7.12	Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels der Ableitungen	400
7.13	Aufgaben	403
7.14	Lösungen	406
8	Integralrechnung	412
8.0	Vorbemerkung	412
8.1	Unbestimmtes Integral	412
8.2	Bestimmtes Integral	415
8.3	Eigenschaften bestimmter Integrale	420
8.4	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summenfolge	421
8.5	Flächeninhalte ebener Flächen zwischen einer Kurve und der x -Achse	425
8.6	Flächen zwischen zwei Kurven	427
8.7	Integration durch Substitution	430
8.8	Der Rauminhalt von Rotationskörpern	432
8.9	Numerische Integration	435
8.10	Aufgaben	439
8.11	Lösungen	440
9	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung	442
9.0	Vorbemerkung	442
9.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	442
9.2	Wahrscheinlichkeitsbegriff	445
9.3	Anzahl von Ergebnissen und Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche	452
9.4	Simulation von Zufallsversuchen	465
9.5	Aufgaben	470
9.6	Lösungen	472

10	Einführung in die Statistik	474
10.0	Vorbemerkung	474
10.1	Statistische Erhebung, Auswertung und Darstellung von Daten	474
10.2	Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung	494
10.3	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	498
10.4	Binomialverteilte Zufallsgrößen	501
10.5	Anwendungen zur Binomialverteilung	503
10.6	Aufstellen und Testen von Hypothesen	509
10.7	Anwendungsaufgaben	513
10.8	Die Poisson-Verteilung	515
10.9	Die Normalverteilung	518
10.10	Anwendungen der Normalverteilung	523
10.11	Exponentialverteilung	525
10.12	Aufgaben	526
10.13	Lösungen	531
11	Komplexe Zahlen	536
11.0	Vorbemerkung	536
11.1	Die arithmetische Form der komplexen Zahlen	536
11.1.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	536
11.1.2	Rechnen mit komplexen Zahlen in der arithmetischen Form	540
11.1.3	Die Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlen- ebene	543
11.2	Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen	545
11.3	Die Exponentialform der komplexen Zahlen	549
11.3.1	Die Multiplikation und die Division komplexer Zahlen in der Ex- ponentialform	549
11.3.2	Das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren kom- plexer Zahlen	551
11.4	Aufgaben	554
11.5	Lösungen	555
12	Vektorrechnung	559
12.0	Vorbemerkung	559
12.1	Punkte und Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	559
12.1.1	Punkte im kartesischen Koordinatensystem	559
12.1.2	Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	560
12.2	Rechnen mit Vektoren	564
12.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	564
12.2.2	Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen	567
12.2.3	Das Skalarprodukt	569
12.2.4	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	575
12.3	Die vektorielle Beschreibung von Geraden	578
12.3.1	Die Vektorgleichung einer Geraden	578
12.3.2	Die Lagebeziehungen zwischen Geraden	580
12.4	Die vektorielle Beschreibung von Ebenen	583
12.4.1	Die Vektorgleichung einer Ebene	583

12.4.2	Die Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden ..	587
12.4.3	Die Lagebeziehung zwischen Ebenen	589
12.4.4	Der Normalenvektor einer Ebene	593
12.5	Aufgaben	597
12.6	Lösungen	604
Sachwortverzeichnis		608

Vorwort

Die vorliegende 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Techniker Ausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen“ nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen“. Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen“ wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung“ wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion“ wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung“ wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Einführung in die Statistik“. Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuauflage wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen“ aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Techniker Ausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin

Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Techniker Ausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014

Die Verfasser

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Diese Beziehung kann ebenso wie Gl. (5.11a) zur Berechnung von Funktionswerten der Arkuskotangensfunktion benutzt werden. Weitere nützliche Beziehungen sind:

$$\pi = 4 \cdot \arctan 1 \quad (5.11c)$$

$$\arcsin x = \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (5.11d)$$

Gl. (5.11c) folgt aus $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Gl. (5.11d) ergibt sich aus einer Formel der Tabelle 4.4 in Abschnitt 4.1.5:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} \quad \text{ergibt} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} \right)$$

mit $\alpha = \arcsin x$ folgt Gl. (5.11d).

Kontrollfragen

- 5.56 Was ist die charakteristischste Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen?
- 5.57 Welcher Unterschied zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion ist am besten geeignet, die Graphen der beiden Funktionen voneinander zu unterscheiden?
- 5.58 Wo hat die Tangensfunktion ihre Polstellen?
- 5.59 Warum spielt die Kotangensfunktion in den Anwendungsfächern keine große Rolle?
- 5.60 Wie heißen die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen?
- 5.61 In welchen Bereichen liegen bei den Arkusfunktionen für negative Argumente x die Funktionswerte?

Aufgaben: 5.42 und 5.43

■ 5.9 Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen

Um Zusammenhänge oder Gesetzmäßigkeiten auch quantitativ richtig darstellen zu können, reichen die Funktionen in ihrer Grundform meist nicht aus. Sie müssen häufig durch passende Summanden oder Faktoren oder durch Verkettung, d. h. Verschachtelung modifiziert werden. Welchen Einfluss diese Modifikation auf die Lage und die Form der Funktionsgraphen hat, soll im Folgenden anhand eines Beispiels aus dem Bereich der Elektrotechnik dargestellt werden.

Die zeitliche Abhängigkeit der Spannung zwischen den Elektroden eines Kondensators mit der Kapazität C , der über einen Widerstand R mithilfe einer Gleichspannung U_0 aufgeladen wird, ist gegeben durch

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (\text{siehe Beispiel 5.52})$$

Bild 5.41 zeigt den grafischen Verlauf einer Kondensatoraufladung für $C = 4,7 \mu\text{F}$, $R = 4,7 \Omega$ und $U_0 = 10 \text{V}$ im Bereich von $0 \leq t \leq 120 \mu\text{s}$.

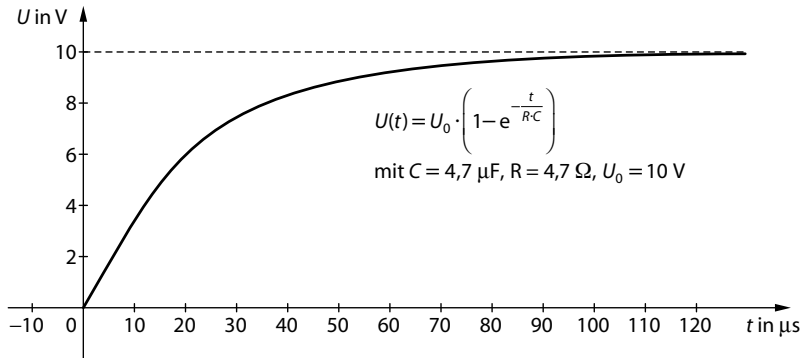


Bild 5.41

Die Funktion, die grundsätzlich einer Kondensatoraufladung zugrunde liegt, ist offensichtlich die e-Funktion (Bild 5.42).

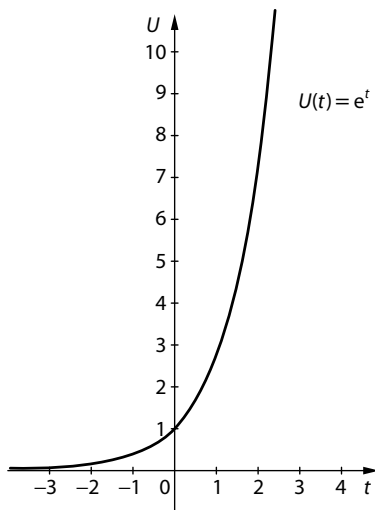


Bild 5.42

Diese e-Funktion soll nun Schritt für Schritt modifiziert werden, bis sie die Gestalt der Kurve der Kondensatoraufladung angenommen hat.

1. Schritt: Veränderung des Vorzeichens der Funktion, d. h. $U(t) = e^t$ wird modifiziert zu $U(t) = -e^t$.

Da bei der Multiplikation einer Funktion mit -1 jeder Funktionswert sein Vorzeichen ändert, gilt:

Die Veränderung des Vorzeichens einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Spiegelung des Funktionsgraphen an der Abszisse.

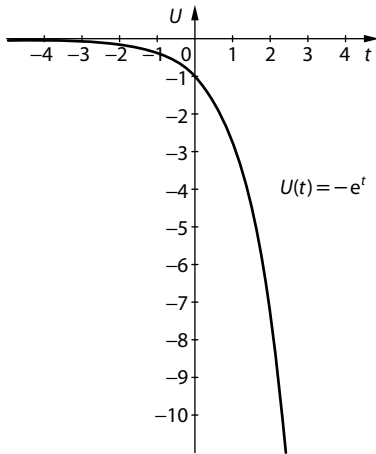


Bild 5.43

2. Schritt: Addition einer Zahl zu einer Funktion. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = -e^t$ wird modifiziert zu $U(t) = -e^t + 1 = 1 - e^t$.

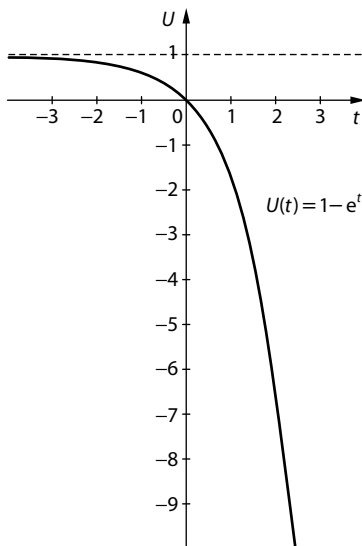


Bild 5.44

Der Graph dieser Funktion geht offenbar durch eine Verschiebung um eine Einheit nach oben hervor. Allgemein gilt:

Die Addition einer Konstanten b zu einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen um b Einheiten nach oben ($b > 0$) bzw. nach unten ($b < 0$).

3. Schritt: Multiplikation einer Funktion mit einem positiven Wert. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = 1 - e^t$ wird modifiziert zu $U(t) = U_0(1 - e^t)$ mit $U_0 = 10\text{ V}$. Die Ordinate ist nun einheitenbehaftet (Bild 5.45).

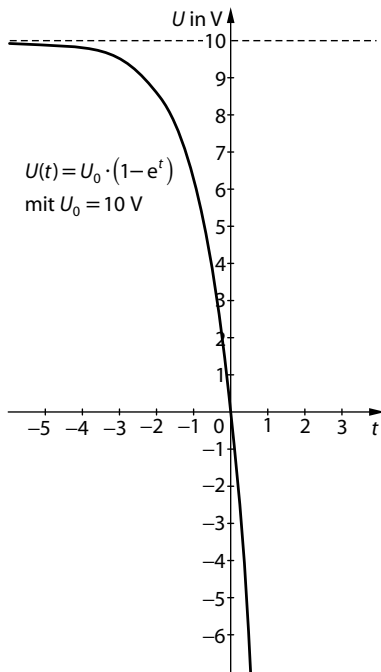


Bild 5.45

Offensichtlich wird die von uns betrachtete Funktion durch die Multiplikation mit $U_0 = 10 \text{ V}$ in senkrechter Richtung stark gestreckt. Da jeder Funktionswert mit dem entsprechenden Faktor multipliziert wird, gilt allgemein:

Durch die Multiplikation einer Funktion mit einem positiven Wert m wird der Funktionsgraph im kartesischen Koordinatensystem in senkrechter Richtung gestreckt ($m > 1$) bzw. gestaucht ($0 < m < 1$).

Anmerkung:

Die Multiplikation einer Funktion mit einer negativen Zahl kann als Hintereinanderausführung einer Vorzeichenveränderung und einer Multiplikation mit einer positiven Zahl angesehen werden: Zur Streckung bzw. Stauchung kommt in diesem Fall noch eine Spiegelung an der Abszisse.

4. Schritt: Veränderung des Vorzeichens des Arguments, d. h. $U(t) = U_0 (1 - e^t)$ wird modifiziert zu $U(t) = U_0 (1 - e^{-t})$.

Dem Bild 5.46 kann entnommen werden:

Die Veränderung des Vorzeichens des Arguments einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Spiegelung des Funktionsgraphen an der Ordinate.

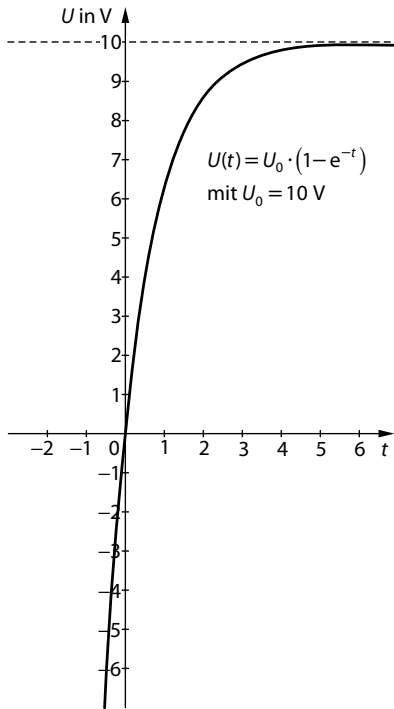


Bild 5.46

5. Schritt: Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einem positiven Wert. In unserem Beispiel heißt das, $U(t) = U_0 (1 - e^{-t})$ wird modifiziert, indem das Argument t mit dem positiven Wert $\frac{1}{R \cdot C}$ multipliziert wird: $U(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$ mit $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 4,7 \Omega$ und $C = 4,7 \mu\text{F}$. Nun ist die Abszisse ebenfalls einheitenbehaftet, das Argument t steht für die Zeit, hier gemessen in μs (Bild 5.47).

Offenbar liegt in diesem Fall eine Verzerrung in waagerechter Richtung vor. Allgemein gilt:

Durch die Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einem positiven Wert k wird der Funktionsgraph im kartesischen Koordinatensystem in waagerechter Richtung gestreckt ($0 < k < 1$) bzw. gestaucht ($k > 1$).

Anmerkung:

Die Multiplikation des Arguments einer Funktion mit einer negativen Zahl kann als Hintereinanderausführung einer Vorzeichenveränderung und einer Multiplikation mit einer positiven Zahl angesehen werden: Zur Streckung bzw. Stauchung kommt in diesem Fall noch eine Spiegelung an der Ordinate.

Offenbar stimmen für $t \geq 0$ die Graphen der Funktionen aus Bild 5.41 und Bild 5.47 überein. Hiermit wurde exemplarisch gezeigt, wie sich der Graph einer modifizierten Funktion aus dem Graphen der Grundfunktion entwickeln lässt.

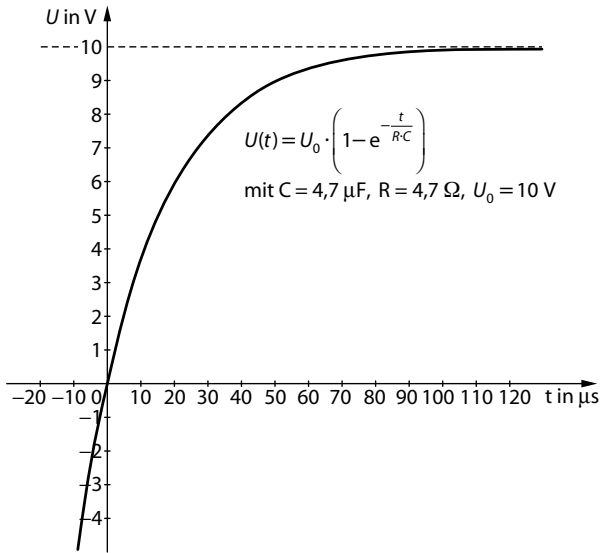


Bild 5.47

Eine weitere Modifikation tritt in diesem Beispiel nicht auf, ist aber in anderen Zusammenhängen von großer Bedeutung (siehe *Beispiele 5.56* bis *5.58*): Was geschieht, wenn man zum Argument einer Funktion eine Zahl addiert?

Die Addition einer Zahl c zum Argument einer Funktion führt im kartesischen Koordinatensystem zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen um c Einheiten nach links ($c > 0$) bzw. nach rechts ($c < 0$).

Beispiele

5.56 Die Parabel $y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3)^2 + 10$ geht aus der Normalparabel $y = x^2$ durch folgende Modifikationen hervor (siehe *Bild 5.48*):

Multiplikation der Funktion mit $\frac{1}{4}$ (Stauchung in senkrechter Richtung), Änderung des Vorzeichens der Funktion (Spiegelung an der Abszisse), Addition der -3 zum Argument (Verschiebung um drei Einheiten nach links) und Addition der 10 zur Funktion (Verschiebung um 10 Einheiten nach rechts).

■ 7.9 Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung

Der Verlauf der Kurve einer Funktion musste bisher mittels einer Wertetabelle ermittelt werden. Die Differenzialrechnung gibt die Möglichkeit, die Untersuchung von Funktionen zu vereinfachen. Die geometrische Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung soll anhand der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$$

erklärt werden. Die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion ist

$$y' = x^2 - 6x + 8,$$

$$y'' = 2x - 6,$$

$$y''' = 2.$$

Betrachtet man den Verlauf der Kurve $y = f(x)$ (vgl. *Bild 7.8a*), erkennt man, dass diese mit wachsenden x -Werten bis zum Punkt H wächst. Der Anstiegswinkel α der Tangente liegt im Intervall $-\infty < x < x_H$ zwischen 0° und 90° , und es gilt $y' = f'(x) > 0$ (vgl. auch *Bild 7.8b*). Vom Punkt H bis zum Punkt T fällt die Kurve. Der Anstiegswinkel α der Tangente liegt im Intervall $x_H < x < x_T$ zwischen -90° und 0° , und es gilt $y' = f'(x) < 0$ (vgl. auch *Bild 7.8b*). Im Intervall $x_T < x < \infty$ wächst die Kurve wieder, und es gilt $y' = f'(x) > 0$.

Das Vorzeichen der ersten Ableitung einer Funktion gibt somit Auskunft, ob die Kurve wächst oder fällt.

Definition 7.4

Die Kurve einer im Intervall I differenzierbaren Funktion f **wächst** bzw. **fällt monoton**, wenn für alle x aus diesem Intervall I gilt $y' = f'(x) \geq 0$ bzw. $y' = f'(x) \leq 0$. Der zugehörige Kurvenbogen heißt **wachsender** bzw. **fallender Monotoniebogen**.

Für das Zeichnen einer Kurve ist es notwendig, neben dem Anstieg der Kurve die Art ihrer Krümmung zu bestimmen. Im *Bild 7.9* sind Kurvenstücke gezeichnet, die deutlich machen, dass es zwei Arten wachsender bzw. fallender Kurven gibt.

Bei wachsenden Funktionen kann die Tangente oberhalb (vgl. *Bild 7.9a*) bzw. unterhalb (vgl. *Bild 7.9b*) der Kurven liegen. Entsprechendes stellt man auch für die fallenden Kurvenstücke fest (vgl. *Bild 7.9c* und *d*). Liegt die Tangente **unterhalb** bzw. **oberhalb** der Kurve, so sagt man, die Kurve ist von unten **konvex** (erhaben) bzw. von unten **konkav** (hohl). Die Kurvenbögen nennt man **Konvex-** bzw. **Konkavbogen**.

Wendet man diese Betrachtungen auf die im *Bild 7.8* dargestellte Funktion an, folgt:

Im Intervall $0 \leq x < x_W$ ist die Kurve $y = f(x)$ konkav. Die zweite Ableitung $y'' = f''(x)$ ist in diesem Intervall negativ. Im Intervall $x_W < x \leq 5$ ist die Kurve $y = f(x)$ konvex. Die zweite Ableitung ist in diesem Intervall positiv. Dieses Ergebnis gilt allgemein.

Definition 7.5

Eine im Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex bzw. konkav, wenn für die zweite Ableitung $y'' = f''(x) > 0$ bzw. $y'' = f''(x) < 0$ gilt.

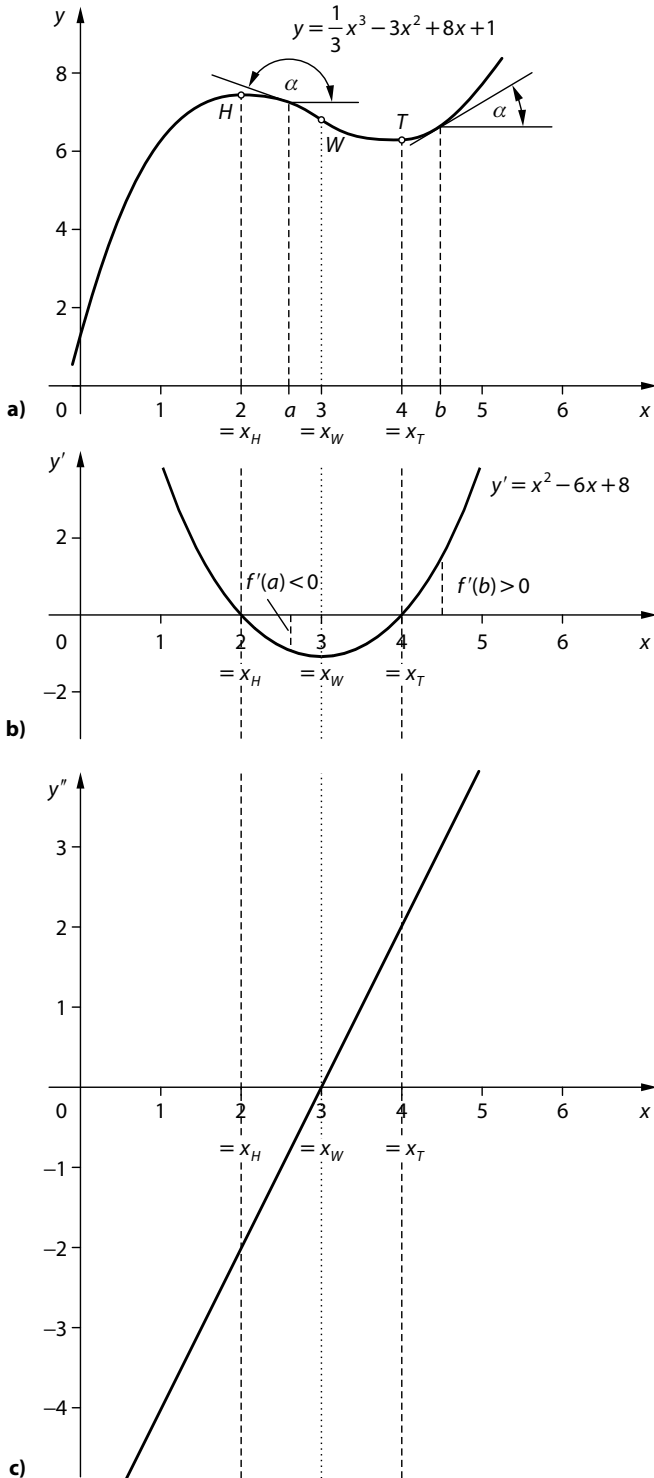


Bild 7.8

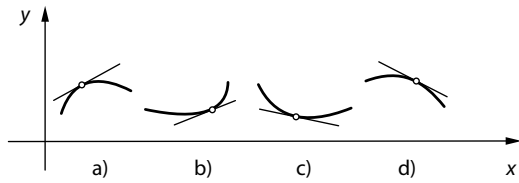


Bild 7.9

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt somit Auskunft über die Krümmungsart der Kurve.

Werden naturwissenschaftliche, technische bzw. ökonomische Zusammenhänge durch Funktionen beschrieben, ist die Ermittlung von charakteristischen Punkten der zugehörigen Kurve oft von besonderem Interesse. Betrachtet man im *Bild 7.10* den Punkt H , so erkennt man, dass seine Ordinate, d. h. der Funktionswert $f(x_H)$, größer ist als die Funktionswerte in der näheren Umgebung U von x_H . (Eine Umgebung von x_H ist ein offenes Intervall $U = (x_1; x_2)$, das x_H enthält: $x_H \in U$, wobei die Breite des Intervalls $x_2 - x_1$ beliebig klein sein kann, vgl. 7.1). Die Funktion nimmt an der Stelle x_H im Vergleich zu anderen Funktionswerten in der näheren Umgebung von $y = f(x)$ einen Höchstwert an. Dieser Wert $f(x_H)$ wird (**relatives**) **Maximum** von $y = f(x)$ genannt. Entsprechend gilt für den Punkt T , dass seine Ordinate, d. h. der Funktionswert $f(x_T)$, kleiner ist als die Funktionswerte in der näheren Umgebung U von x_T . Der Wert $f(x_T)$ heißt (**relatives**) **Minimum** von $y = f(x)$ (vgl. *Bild 7.10*).

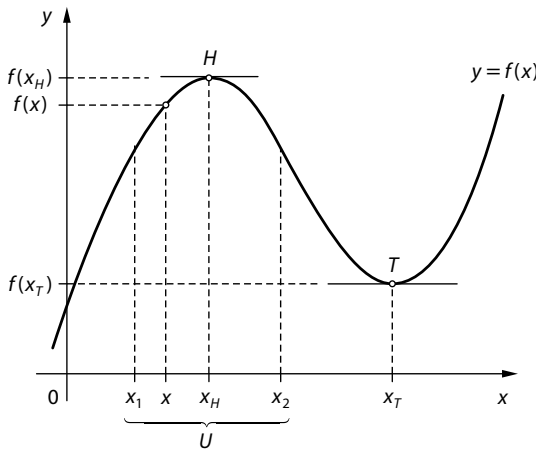


Bild 7.10

Definition 7.6

Die Funktion f hat in $\left\{ \begin{matrix} x_H \\ x_T \end{matrix} \right\}$ eine (relative) $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{matrix} \right\}$, wenn eine Umgebung

$U = (x_1; x_2)$ von $\left\{ \begin{matrix} x_H \\ x_T \end{matrix} \right\}$ existiert,

sodass für alle $x \in U$ $\left\{ \begin{matrix} f(x) \leq f(x_H) \\ f(x) \geq f(x_T) \end{matrix} \right\}$ ist.

Der Funktionswert $\left\{ \begin{matrix} y_H = f(x_H) \\ y_T = f(x_T) \end{matrix} \right\}$ heißt (relatives) $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$ von f .

Minimum und Maximum werden auch unter dem Begriff Extremum zusammengefasst. Die Punkte H und T sind (relative) Extrempunkte, speziell (relativer) Maximum- oder Hochpunkt H bzw. (relativer) Minimum- oder Tiefpunkt T . Zu beachten ist, dass die Extremwerte nur in einem bestimmten Intervall Höchst- und Tiefstwerte sind.

Aus dem *Bild 7.11* wird ersichtlich, dass der Funktionswert an der Stelle $x = c$ kleiner ist als der Funktionswert an der Stelle $x = g$, obwohl sich an der Stelle $x = c$ ein relatives Maximum befindet. An den Stellen $x = b$ und $x = d$ liegt ein relatives Minimum vor. Daraus folgt, dass Extremwerte nicht die absolut größten bzw. kleinsten Funktionswerte sind. Sie sind nur die größten bzw. kleinsten Werte einer Funktion bezüglich ihrer unmittelbaren Umgebung. Deshalb bezeichnet man sie auch als relative Extremwerte. Gilt für den gesamten Definitionsbereich $f(x_H) \geq f(x)$ bzw. $f(x_T) \leq f(x)$ so spricht man von einem **absoluten Maximum** oder **absoluten Minimum**. Da absolute Extremwerte hier nicht behandelt werden, wird der Zusatz „relativ“ nachfolgend weggelassen.

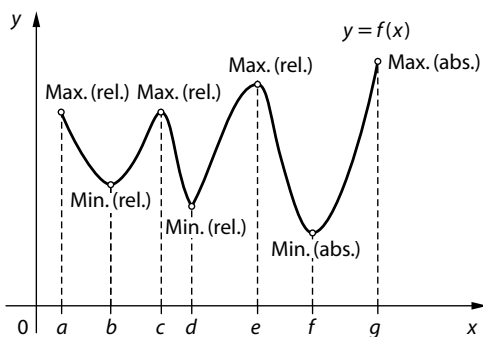


Bild 7.11

Betrachtet man im *Bild 7.11* alle die Punkte der Kurve, die den Extrema der Funktion f entsprechen und keine Randpunkte des Definitionsbereichs sind, so haben sie eine charakteristische Eigenschaft: Wenn die Tangente an den Graphen existiert, so verläuft sie parallel zur x -Achse, d. h., dass die Ableitung von f an den Extremstellen gleich 0 ist. Allgemein gilt folgender Satz:

Satz 7.2

Wenn eine Funktion f in $x = x_E$ eine Extremstelle hat und f in einer Umgebung U von x_E differenzierbar ist so gilt $f'(x_E) = 0$.

Die Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extremwertes von f an der Stelle $x = x_E$. Nur die Lösungen der Gleichung $f'(x_E) = 0$ können Extremstellen der Funktion f sein. Darunter können aber auch Lösungen sein, die keine Extremstellen von f sind.

Beispiel

7.26 $y = (x - 1)^3 + 1$.

Es ist $y' = 3(x - 1)^2$. Die Gleichung $3(x - 1)^2 = 0$ liefert die Lösung $x_0 = 1$. Die Funktion f hat dennoch an der Stelle $x_0 = 1$ kein Extremum. In jeder Umgebung U von $x = 1$ gibt es sowohl Funktionswerte, die kleiner als $f(1)$, als auch größer als $f(1)$ sind (vgl. *Bild 7.12*).

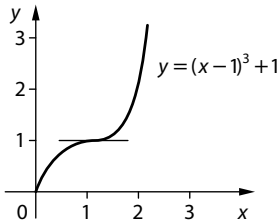


Bild 7.12

Zur Bestimmung der Extrema einer Funktion muss deshalb ein ergänzendes Kriterium gefunden werden, das es gestattet, die tatsächlichen Extrema einer Funktion auszusondern. Aus den *Bildern 7.8* und *7.10* erkennt man, dass in den Extrema jeweils die Funktion f ihr Monotonieverhalten ändert. Diese Eigenschaft besitzt die im *Bild 7.12* dargestellte Funktion f nicht. Sie hat deshalb in $f(1)$ kein Extremum. Allgemein lässt sich für den Wechsel des Monotonieverhaltens einer Funktion f an den Stellen ihrer Extrema folgender Satz formulieren (hinreichende Bedingung für Extrema).

Satz 7.3

Ist eine Funktion f im Intervall I zweimal differenzierbar und ist

$$f'(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f''(x_E) < 0 \\ f''(x_E) > 0 \end{array} \right\}, \text{ dann ist } x_E \text{ eine } \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{array} \right\}.$$

Der Fall $f'(x) = f''(x) = 0$ wird zunächst ausgeschlossen.

Betrachtet man den Punkt W im *Bild 7.8a*, erkennt man, dass die Kurve dort ihren Krümmungssinn ändert. Deshalb wird dieser Punkt **Wendepunkt** genannt. Der Wendepunkt trennt ein konvexes Kurvenstück von einem konkaven Kurvenstück. Die Funktion $y' = f(x)$ besitzt an der Stelle x_W ein Minimum (vgl. *Bild 7.8b*). Der Anstiegswinkel der Tangente beträgt an der Stelle x_W gleich 0^0 . Daraus folgt, dass $f''(x_W) = 0$ sein muss (vgl. *Bild 7.8b* und *c*). Im Allgemeinen muss nach der hinreichenden Bedingung über Extremwerte die übernächste Ableitung, also $f'''(x) \neq 0$ sein. Die dritte Ableitung von $y = f(x)$ an dieser Stelle ist $y''' = 2$.

Als notwendige Bedingung für das Auftreten eines Wendepunktes von einer Funktion $y = f(x)$ in x_W lässt sich folgender Satz formulieren.

Satz 7.4

Ist eine Funktion f in einer Umgebung U von x_W zweimal differenzierbar und ist W ein **Wendepunkt** der zu f gehörigen Kurve, dann ist $f''(x_W) = 0$.

Die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes lautet:

Satz 7.5

Ist eine Funktion f in einer Umgebung U von x_W zweimal differenzierbar und ist $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, dann ist W ein **Wendepunkt** der zugehörigen Kurve.

Ein Wendepunkt mit waagerechter Wendetangente heißt **Stufen-** oder **Terrassenpunkt** (vgl. *Bild 7.12*). Für ihn lautet die notwendige Bedingung $y'(x_W) = 0$ und $y''(x_W) = 0$.

Beispiel

7.27 Die Funktion $y = f(x) = 2x^3 + 1$ soll auf Extrem- und Wendepunkte untersucht werden.

Lösung: $y' = 6x^2$, $y'' = 12x$, $y''' = 12$

Aus $y' = 0$ folgt $6x^2 = 0$, $x_{1/2} = 0$.

Setzt man den errechneten x -Wert in die zweite Ableitung ein, ergibt sich $y''(0) = 0$. Eine Entscheidung über das Vorliegen eines Extremwertes kann noch nicht getroffen werden. Da die dritte Ableitung $y''' \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $x_{1/2}$ ein Wendepunkt vor. Die Koordinaten lauten: $W(0; 1)$ (horizontaler Wendepunkt). Da aber auch $y'(0) = 0$ ist handelt es sich um einen Stufen- oder Terrassenpunkt (vgl. Bild 7.13).

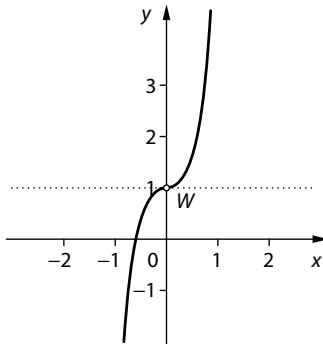


Bild 7.13

Kontrollfragen

- 7.11 Wann wächst bzw. fällt eine im Intervall I differenzierbare Funktion f ?
- 7.12 Wie verhält sich die Kurve einer Funktion f in der Umgebung einer Extremstelle?
- 7.13 Welcher Unterschied besteht zwischen einem relativen und einem absoluten Maximum?
- 7.14 Geben Sie die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Extremwertes einer Funktion f an!
- 7.15 Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes einer Funktion f an?
- 7.16 Wann ist eine im Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f konvex bzw. konkav?

7.10 Kurvendiskussion

In den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Ökonomie werden viele Zusammenhänge mit Funktionen beschrieben. Eine in der Praxis häufige Aufgabenstellung ist, sich für eine gegebene Funktion schnell einen Überblick über den Verlauf der Kurve der Funktion zu verschaffen. Eine Wertetabelle ist dazu nicht immer geeignet, da solche charakteristischen Punkte der Kurve, wie z. B. die Extrempunkte, im Allgemeinen nicht erfasst werden. Mithilfe der Differenzialrechnung kann man meist recht schnell die charakteristischen Punkte und Eigenschaften der Kurve der Funktion erfassen und sie im Koordinatensystem darstellen. Die Untersuchungen zur Gewinnung des Bildes einer Funktion nennt man **Kurvendiskussion**.

12.2.3 Das Skalarprodukt

Aus den Koordinaten zweier Vektoren lässt sich der Winkel bestimmen, den diese Vektoren miteinander einschließen.

Beispiel

12.10 Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Mit den Bezeichnungen aus *Bild 12.14* und Gl. (4.10) gilt:

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ &= \frac{a_1}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_1}{|\vec{b}|} + \frac{a_2}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_2}{|\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 6 + 6 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2}} \\ &= \frac{30}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{40}} = \frac{30}{\sqrt{1800}} = \frac{30}{\sqrt{2} \cdot 30} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \delta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ \end{aligned}$$

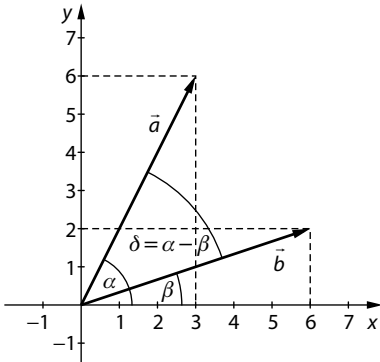


Bild 12.14

Allgemein gilt:

Der Kosinus des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Winkels $\varphi (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$ lässt sich folgendermaßen bestimmen:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{bzw.} \quad (12.7a)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad (12.7b)$$

Beispiele

- 12.11 a) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $3\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach Gl. (12.7b) ist

$$\cos \varphi = \frac{-2 \cdot (-6) + 3 \cdot 9 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-3)^2}} = \frac{12 + 27 + 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{126}} = \frac{42}{\sqrt{1764}} = \frac{42}{42} = 1$$

also $\varphi = \arccos(1) = 0^\circ$.

Der Winkel von 0° war zu erwarten, da ein Vektor und sein mit einem positiven Faktor gebildetes Vielfaches die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung haben.

- b) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ und $-6\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach Gl. (12.7a) ist

$$\cos \varphi = \frac{0,5 \cdot (-3) + (-1,5) \cdot 9}{\sqrt{(0,5)^2 + (-1,5)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 9^2}} = \frac{-1,5 - 13,5}{\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{90}} = \frac{-15}{\sqrt{225}} = \frac{-15}{15} = -1$$

also $\varphi = \arccos(-1) = 180^\circ$.

Dieses Ergebnis war ebenfalls zu erwarten, da ein Vektor und sein mit einem negativen Faktor gebildetes Vielfaches die gleiche Richtung, aber die entgegengesetzte Orientierung haben und somit einen gestreckten Winkel bilden.

- c) Der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ soll berechnet werden.

Lösung: Nach Gl. (12.7b) ist

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{6 - 12 + 6}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{54}} = 0$$

also $\alpha = \arccos(0) = 90^\circ$.

Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} bilden also einen rechten Winkel, d. h. sie stehen senkrecht aufeinander.

- 12.12 Es ist der Winkel α im Dreieck zu berechnen, das durch die Punkte $A(-4; -1)$, $B(3; -3)$ und $C(2; 4)$ gebildet wird (siehe Bild 12.15).

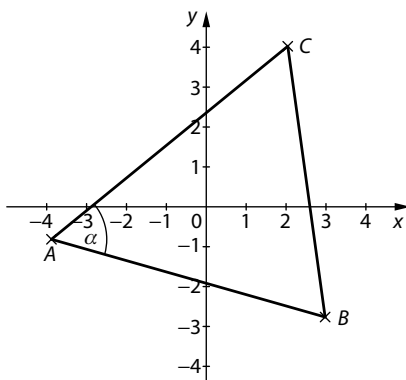


Bild 12.15

Lösung: Gesucht ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist nach Gl. (12.7a)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6 \cdot 7 + 5 \cdot (-2)}{\sqrt{6^2 + 5^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-2)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{53}}\right) = \arccos\left(\frac{32}{56,86}\right) \\ = \arccos(0,5629) = 55,7^\circ$$

- 12.13 Für eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundseite ($a = 2$ m) und einer Höhe von $h = 2,5$ m ist der Winkel σ zu berechnen, den die Seitenlinien an der Pyramidenspitze miteinander bilden (siehe Bild 12.16).

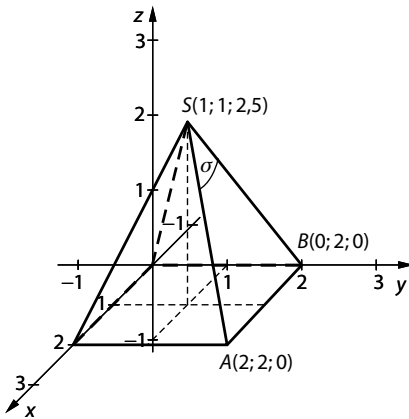


Bild 12.16

Lösung: Gesucht ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $\vec{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$. Dann ist nach Gl. (12.7b)

$$\sigma = \arccos\left(\frac{-1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2,5 \cdot 2,5}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2,5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2,5^2}}\right) = \arccos\left(\frac{6,25}{\sqrt{8,25} \cdot \sqrt{8,25}}\right) \\ = \arccos\left(\frac{6,25}{8,25}\right) = \arccos(0,7576) = 40,7^\circ \quad \blacksquare$$

Betrachtet man zwei **Einheitsvektoren** (d. h. Vektoren mit dem Betrag 1), so ist der Kosinus des Winkels offenbar nur durch den Zähler von Gl. (12.7a) bzw. (12.7b) gegeben. Diese Summe erzeugt aus den Koordinaten zweier Vektoren einen Skalar (eine reelle Zahl). Daher kann man diese Verknüpfung als eine Abbildung auffassen, die zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Diese Abbildung nennt man **Skalarprodukt** (manchmal auch „**inneres Produkt**“, seltener **Punktprodukt**) und sie wird folgendermaßen geschrieben:

Definition 12.2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{i=1}^2 a_i b_i \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Anmerkungen:

- Das Skalarprodukt zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} wird manchmal auch durch spitze Klammern gekennzeichnet: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
- Da diese Definition des Skalarprodukts sich auf die Koordinaten der Vektoren bezieht, nennt man sie die **Koordinatenform des Skalarprodukts**.
- Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Quadrat seines Betrages: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
Aus diesem Grund ist das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst genau dann 0, wenn der Vektor selbst der Nullvektor ist: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- Der Ausdruck $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ ist sinnlos, sowohl in der Klammerung $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ als auch in der Klammerung $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$, da das Skalarprodukt nicht aus einem Vektor und einer reellen Zahl gebildet werden kann.

Da das Skalarprodukt auf die Multiplikation und die Addition reeller Zahlen zurückgeführt wird, ist es **kommutativ**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Aus dem gleichen Grund gilt für das Skalarprodukt das **Assoziativgesetz** in folgendem Sinne: $r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$, $r \in \mathbb{R}$.

Ebenso gilt für das Skalarprodukt das **Distributivgesetz**: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Beispiel

12.14 a) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 = -2 - 12 = -14$$

b) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot 6 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = -6 - 8 + 14 = 0$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass das Skalarprodukt den Wert 0 annehmen kann, ohne dass einer der beiden beteiligten Vektoren der Nullvektor ist. ■

Vergleicht man die *Gln.* (12.7a) bzw. (12.7b) mit der *Definition 12.2*, so erkennt man, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren dividiert durch den Betrag beider Vektoren dem Kosinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels gleich ist:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{oder} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad (12.8)$$

wenn φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist.

Anmerkungen:

- Da diese Schreibweise des Skalarprodukts sich nicht auf die Koordinaten der Vektoren bezieht, nennt man sie die **koordinatenfreie Form des Skalarprodukts**.
- Die Gl. (12.8) zeigt, dass das Skalarprodukt durch den Betrag zweier Vektoren und den durch sie eingeschlossenen Winkel φ eindeutig bestimmt ist.
- Für $\vec{a} = \vec{b}$ ergibt sich auch aus dieser Form des Skalarprodukts: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$, also $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2}$.

Offenbar ist das Skalarprodukt genau dann 0, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist oder der Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels 0 ist ($\cos \varphi = 0$). Letzteres ist genau dann der Fall, wenn φ ein ungeradzahliges Vielfaches von 90° ist, also wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als **Orthogonalitätsbedingung**:

Zwei Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad (12.9)$$

Beispiele

12.15 Die Vektoren \vec{x} und \vec{y} aus *Beispiel 12.14 b* stehen offenbar senkrecht aufeinander.

12.16 Gesucht ist ein Vektor \vec{c} , der zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Lösung: Nach der Orthogonalitätsbedingung (Gl. (12.9)) muss für die Koordinaten des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gelten:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ gelten:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 + 4c_3 = 0, \quad \text{sowie} \quad (1)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 2c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \quad (2)$$

Aus (1) folgt: $c_1 = -4c_3$, eingesetzt in (2) ergibt sich: $-8c_3 - 2c_2 + 3c_3 = -2c_2 - 5c_3 = 0$.

Diese Gleichung ist offenbar für $c_2 = 5$ und $c_3 = -2$ erfüllt, für c_1 ergibt sich dann: $c_1 = 8$.

Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und alle seine Vielfachen stehen also senkrecht sowohl auf dem gegebenen Vektor \vec{a} als auch auf dem gegebenen Vektor \vec{b} .

- 12.17 Gesucht ist die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Seitenlängen $a = 2$ cm, $b = 3$ cm und $c = 2,5$ cm sowie der Winkel, unter dem sich jeweils zwei Raumdiagonalen schneiden.

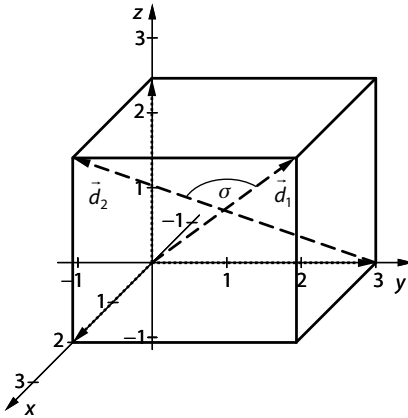


Bild 12.17

Lösung: Nach Bild 12.17 lassen sich die Raumdiagonalen folgendermaßen als Vektoren darstellen:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist $|\vec{d}_1| = |\vec{d}_2| = \sqrt{4 + 9 + 6,25} = \sqrt{19,25} = 4,39$, d. h. die Raumdiagonalen haben eine Länge von 4,39 cm.

Für den Schnittwinkel σ gilt nach Gl. (12.8):

$$\cos \sigma = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2|} = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 6,25}{\sqrt{19,25} \cdot \sqrt{19,25}} = \frac{1,25}{19,25} = 0,065 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \arccos(0,065) = 86,3^\circ$$

- 12.18 Zu zeigen ist, dass jeder Umfangswinkel über dem Durchmesser eines Kreises ein rechter ist (Satz des Thales).

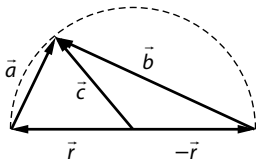


Bild 12.18

Lösung: Mit den Bezeichnungen von Bild 12.18 gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{c} - \vec{r}) \cdot (\vec{c} + \vec{r}) = \vec{c}^2 - \vec{r}^2 = |\vec{c}|^2 - |\vec{r}|^2 = 0$, da $|\vec{c}| = |\vec{r}|$ (\vec{c} ist ein Radius im Kreis!). Wegen der Orthogonalitätsbedingung (Gl. (12.9)) bilden \vec{a} und \vec{b} also einen rechten Winkel. ■

Sachwortverzeichnis

2π -periodisch 308
2-Punkte-Form der Geradengleichung 277

A

Abbildung 263
abhängige Variable einer Funktion 263
Abklingkonstante 324
Ableitung 370
– der mittelbaren Funktion 382
– der Potenzfunktion 373
– einer konstanten Funktion 375
– eines konstanten Faktors 375
– eines Produktes 380
– eines Quotienten 381
–, geometrische Interpretation 386
–, höhere 385
–, Summe 375
– weiterer Funktionen 383
–, zweite 385
Abschreibung 347
–, geometrisch-degressive 353
–, lineare 347
Abschreibungsbetrag 347
Abschreibungssatz 347
absoluter Betrag 29
Abszisse 266
Achsenabschnitt einer Geraden 275
achsensymmetrische Funktion 294
Addition 40
Addition von Vektoren 564 f.
Additionsregel 448
Additionssystem 25
Additionstheoreme 233
Additionsverfahren 114
Ähnlichkeit 154
Ähnlichkeitssätze 160
algebraische Form komplexer Zahlen 539
algebraische Gleichung 88, 90
algebraische Summe 35
allgemeine Form der quadratischen Funktion 283
allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems 113
allgemeines Dreieck 156
Allmenge 16

Alternative 21
Alternativhypothese 509
Alternativtest 509
analytische Darstellung einer Funktion 265
Anfangsbedingung 415
Anfangsglied 342
Anfangswert 324
äquivalente Umformung 89
Äquivalenz 18
Arbeitshypothese 509
Argument einer komplexen Zahl 546
arithmetische Form komplexer Zahlen 539
arithmetisches Mittel 481
Arkusfunktionen 310
Assoziativgesetz 564, 567, 572, 575
Assoziativität 20, 33
Asymptote 304, 362, 392 f.
Aufzinsen 352
Aussage 14
Aussageform 15
–, Erfüllung 15
axialsymmetrisch 300

B

Basis 51, 61
Baumdiagramm 453
bedingte Wahrscheinlichkeit 461
Bedingung, hinreichende 18
notwendige 18
Bernoulli-Experiment 501
Bernoulli-Formel 458
Bernoulli-Kette 501
Betrag, absoluter 29
Betrag einer komplexen Zahl 544, 546
Betrag eines Vektors 561
Bijektivität 270
binärer Logarithmus 64
Binärsystem 26
Binomialkoeffizient 69, 458
Binomialverteilung 501
–, kumulative 505
binomische Formel 36
binomischer Lehrsatz 70
Bogenmaß 103, 216

Bruch, echter 39
 –, unechter 39
 Bruchgleichung 91
 Bruchrechnung 39

C

Cavalierisches Prinzip 195
 Cramersche Regel 126

D

deckungsgleiche Geraden 279
 Definitionsbereich einer Funktion 263
 Definitionsbereich einer Ungleichung 111
 dekadischer Logarithmus 63, 66
 Determinante 126
 –, dreireihige 129
 –, mehrreihige 129
 –, zweireihige 126
 Determinantenverfahren 125
 Dezimalbruch 24
 Dezimalsystem 26
 Differenz 19
 Differenzenquotient 368
 –, Grenzwert 369
 Differenzial 368, 376
 Differenzialquotient 378
 Differenzierbarkeit 372
 Dimension eines Koordinatensystems 560
 direkte Proportionalität 45
 disjunkte Menge 17
 Diskontierung 352
 diskrete Zufallsgröße 515
 Distributivgesetz 567, 572, 575
 Distributivität 20, 33
 Divergenz 107
 Division 40
 Doppelbruch 43
 Drehung 148
 Dreieck, allgemeines 156
 –, Flächeninhalt 246
 –, gleichschenkliges 164
 –, gleichseitiges 165
 –, rechtwinkliges 163
 Dreiecksberechnung 237
 Dreieckstransversale 161
 dreireihige Determinante, Lösung 129
 Durchschnitt 19
 Durchstoßpunkt 587

E

Ebene, Normalenvektor 593
 –, vektorielle Beschreibung 583
 echt gebrochenrationale Funktion 302

echte Teilmenge 17
 echter Bruch 39
 e-Funktion 305
 Einheitsvektor 561, 571
 Einsetzungsverfahren 114
 Element 13
 – einer Menge 13
 empirische Verteilungsfunktion 477
 Endglied 344
 entgegengesetzte Zahl 29, 33
 ε -Umgebung 355
 Ereignis 442
 Erfüllung der Aussageform 15
 Ergebnis 442
 Ergebnisraum 442
 –, Mächtigkeit 442
 Erwartungswert 498, 502, 516, 518, 521, 525
 Erweitern 40
 Eulersche Formel 549
 Eulersche Gerade 161
 explizite Form einer Funktionsgleichung 268
 Exponent 51
 Exponentialform komplexer Zahlen 549
 Exponentialfunktionen 303
 Exponentialgleichung 100
 Exponentialverteilung 525
 Extrempunkt 389
 Extremwertaufgabe 398

F

Faktorenzerlegung 36
 Fakultät 69
 Fehler 1. Art 509
 – 2. Art 509
 Festkommadarstellung 30
 Flächenelement 423
 Flächeninhalt 174, 425, 427
 Flächeninhalt eines Dreiecks 246
 freie Variable 86
 Funktion 263, 382
 –, abhängige Variable 263
 –, Ableitung 370
 –, achsensymmetrische 294
 –, allgemeine Form der quadratischen 283
 –, analytische Darstellung 265
 –, äußere 382
 –, Definitionsbereich 263
 –, ganzrationale, n -ten Grades 296
 –, gebrochenrationale 300
 –, gerade 293
 –, grafische Darstellung 265
 –, innere 382
 –, konkave 386
 –, konstante 269

- , konvexe 386
- , lineare 274
- , Lücke 392
- , Maschinenmodell 264
- , mittelbare 320
- , monoton fallende 269
- , monoton wachsende 269
- , nach oben beschränkte 270
- , nach unten beschränkte 270
- , Nullstelle 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
- , Polstelle 300
- , Produktform einer quadratischen 287
- , Prozessmodell 264
- , punktsymmetrische 294
- , quadratische 283
- , Scheitelform einer quadratischen 286
- , stetige 361
- , Stützstellen 298
- , trigonometrische 217
- , Umkehrfunktion einer linearen 277
- , unabhängige Variable 263
- , verkettete 320
- , Wertebereich 263
- Funktionsgleichung 265
- , aufstellen mittels der Ableitungen 400

G

- Galton-Brett 503
- ganze Zahl 24
- ganzrationale Funktionen 296
- n -ten Grades 296
- Gaußsche Zahlenebene 543
- Gaußscher Algorithmus 120
- gebrochenrationale Funktion 300
- gebundene Variable 86
- Gegenereignis 442
- Gegenhypothese 509
- Gegenvektor 563
- Genauwert 351
- geometrisches Mittel 483
- geordnetes n -Tupel 114
- geordnetes Paar 114
- geordnetes Quadrupel 114
- geordnetes Tripel 114
- Gerade 143
- , Achsenabschnitt 275
- , deckungsgleiche 279
- , Lagebeziehung 279, 580
- , Parallelität 279
- , Schnittpunkt 280
- , senkrechter Schnitt zweier 282
- , Steigungsfaktor 275

- , Steigungswinkel 276
- , Vektorgleichung 578
- gerade Funktionen 293
- gestaffelte Form 120
- gleichschenkliges Dreieck 164
- gleichseitiges Dreieck 165
- Gleichsetzungsverfahren 114
- Gleichung 86
- , algebraische 88, 90
- , Bruch- 91
- dritten und höheren Grades 97
- , Exponential- 100
- , goniometrische 100, 102
- , grafische Lösung 105
- , identische 88
- , kubische 97
- , linear abhängige 118
- , logarithmische 100 f.
- n -ten Grades 97
- , quadratische 93
- , transzendente 88, 99 f.
- , Wurzel- 91
- Gleichungssystem, lineares 113
- Gleitkommadarstellung 30
- goniometrische Form komplexer Zahlen 548
- goniometrische Gleichung 100, 102
- Gradmaß 215
- grafische Darstellung einer Funktion 265
- grafische Lösung 105
- Grenze, obere 49
- , untere 49
- Grenzkurve 302, 304
- Grenzwert 360, 368 f.
- einer Folge 355
- einer Funktion 358
- , linksseitiger 359
- , rechtsseitiger 359
- , uneigentlicher 356
- Grundbereich 15
- Grundintegrale 414
- Grundkonstruktion 151
- Grundziffer 25

H

- Häufigkeit, relative 465
- Häufigkeitspolygon 479
- Hauptwert 351, 553
- Hauptwerte der Arkussinusfunktion 311
- Hexadezimalsystem 26
- Histogramm 479
- Hochpunkt 389
- Höhensatz 164
- Hornersches Rechenschema 98
- Hyperbel 300

I

Idempotenz 21
 identische Gleichungen 88
 Identität 88
 imaginäre Achse 543
 imaginäre Zahl 537
 imaginäre Zahleneinheit 536
 Imaginärteil 539
 Implikation 18
 implizite Form einer Funktionsgleichung 268
 indirekte Proportionalität 46
 Injektivität 270
 Inklusion 16
 inneres Produkt 571
 Integral 412
 – als Grenzwert 421
 –, bestimmtes 415, 418, 422
 –, partikuläres 416
 –, unbestimmtes 413
 Integralfunktion 413
 Integralrechnung, Grundaufgabe 412
 Integrand 413
 Integration 412
 – durch Substitution 430
 –, Flächenberechnung 416
 –, numerische 435
 Integrationsgrenzen 418
 Integrationsintervall 420
 Integrationskonstante 413
 Integrationsvariable 413
 Intervall 28
 irrationale Zahl 25
 Iteration 105

K

Kardinalzahl 23
 kartesische Koordinaten 546
 kartesisches Koordinatensystem 265, 559
 Kathetensatz 163
 Kegel 190
 Kegelstumpf 191
 Kennziffer 66
 Keplersche Fassregel 436
 Kettenregel 382
 Klasse 476
 Kombination 451, 457
 – mit Wiederholung 457
 – ohne Wiederholung 457
 Kombinatorik 451
 Kommutativgesetz 567
 Kommutativität 20, 33
 Komplement einer Menge 21

komplexe Zahl 539
 –, algebraische Form 539
 –, Argument einer 546
 –, arithmetische Form 539
 –, Betrag einer 544, 546
 –, Exponentialform 549
 –, goniometrische Form 548
 –, konjugiert 539
 –, Norm einer 541
 trigonometrische Form 548
 –, vektorielle Darstellung 543
 Kongruenz 149
 Kongruenzsätze 158
 konjugiert komplexe Zahl 539
 Konjunktion 21
 konstante Funktion 269
 Konvergenz 107
 Konvertieren 27
 Konvertierung 26
 Koordinaten eins Punktes 560
 Koordinatenform des Skalarprodukts 572
 koordinatenfreie Form des Skalarprodukts 573
 Koordinatensystem, Dimension 560
 –, kartesisches 559
 Koordinatenursprung 266, 560
 Korrelation 488
 Korrelationskoeffizient 489
 Kosinus 217
 Kosinusfunktion 308
 –, Maximum und Minimum 309
 Kosinussatz 242
 Kotangens 217
 Kreis 170
 Kreisdiagramm 266
 Kreuzprodukt 575
 kubische Gleichung 97
 Kugel 195
 kumulative Binomialverteilung 505
 Kurvendiskussion 391
 –, Asymptoten 393
 –, Definitionsbereich 392
 –, Extrempunkte und Art der Extremwerte 393
 –, Nullstellen 392
 –, Schnittpunkt mit der y -Achse 392
 –, Skizze der Funktion 393
 –, Symmetrie 392
 –, Unstetigkeitsstellen 392
 –, Verhalten im Unendlichen 393
 –, Wendepunkte 393
 –, Wertebereich 393
 Kürzen 40

L

Lagebeziehung zwischen Ebenen 589
 – zwischen einer Ebene und einer Geraden 587
 – zwischen Geraden 279, 580
 Laplace-Experiment 446
 leere Menge 14
 linear abhängige Gleichung 118
 lineare Funktion 274
 lineares Gleichungssystem 113
 –, allgemeine Form 113
 Linearfaktoren 298
 Logarithmensystem 63
 logarithmische Gleichung 100 f.
 Logarithmus 51, 61
 –, Basis 61
 –, binärer 64
 –, dekadischer 63, 66
 –, natürlicher 63
 –, Numerus 61
 Logarithmusfunktionen 306
 Lösung der Aussageform 15
 Lücke 392

M

Mächtigkeit des Ergebnisraumes 442
 Mantisse 66
 Maschinenmodell von Funktionen 264
 Maximum 388
 –, absolutes 389
 –, relatives 388
 Median 482
 mehrreihige Determinante 129
 mehrstufiger Zufallsversuch 452
 Menge 13
 –, Differenz 19
 –, disjunkte 17
 –, Durchschnitt 19
 –, Komplement 21
 –, leere 14
 –, Vereinigung 19
 Mengenoperation 19
 Merkmal, qualitatives 474
 –, quantitatives 474
 Minimum 388
 –, absolutes 389
 –, relatives 388
 Mittel, arithmetisches 481
 –, geometrisches 483
 mittelbare Funktion 320
 Mittelwert 480
 mittlere Proportionale 44
 Modalwert 483
 monoton fallende Funktion 269

monoton wachsende Funktion 269
 Monotonie von Funktionen 269
 Monotoniebogen 386
 Multiplikation 40
 Multiplikation eines Vektors 567
 Multiplikationsregel 449
 Multiplikationssatz 462

N

nach oben beschränkte Funktion 270
 nach unten beschränkte Funktion 270
 Näherungsverfahren 104
 natürliche Zahl 23
 natürlicher Logarithmus 63
 Nebenbedingungen 398
 Nebenwinkel 146
 n -Eck 168
 Negation 22
 Nenner, Rationalmachen 58
 Neugrad 216
 Norm einer komplexen Zahl 541
 Normaleneinheitsvektor 595
 Normalenform der Ebenengleichung 593
 Normalenvektor einer Ebene 593
 Normalform der Geradengleichung 275
 Normalform einer quadratischen Funktion 283
 Normalparabel 285
 Normalverteilung 518
 –, standardisierte 521
 Nullfolge 356
 Nullhypothese 509
 Nullpunkt 266
 Nullstelle 392
 – einer Funktion 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
 – einer Parabel 287
 Nullvektor 563
 Numerus 51, 61

O

obere Grenze 49
 obere Schranke 270
 Obermenge 17
 Obersumme 422
 Ordinalzahl 23
 Ordinate 266
 Orientierung eines Vektors 560
 Orthogonalitätsbedingung 573
 Ortsvektor eines Punktes 561

P

Paar, geordnetes 114
 Parabel 283
 – n -ter Ordnung 293
 –, Nullstelle 287
 Parallelität zweier Geraden 279
 Parameter 117
 Pascalsches Dreieck 68
 π -periodisch 309
 periodische Funktionen 307
 Permutation 451, 456
 – mit Wiederholung 456
 – ohne Wiederholung 456
 Pfadregel 454
 Pivotelement 121
 Planimetrie 143
 Poisson-Verteilung 515
 Polarkoordinaten 228, 546
 Polstelle einer Funktion 300
 Polynom 89
 Polynomfunktion n -ten Grades 296
 Positionssystem 26
 Potenzfunktionen 293
 Potenzgesetz 51
 primäre Verteilungstafel 476, 481
 Prinzip der Mengenbildung 16
 Prisma 183
 Prismatoid 188
 Probe 90
 Produktform einer quadratischen Funktion 287
 Produktgleichung 44
 Produktregel 380, 454
 Promille 47
 Proportion 44
 Proportionalität, direkte 45
 –, indirekte 46
 Prozentrechnung 47
 Prozessmodell von Funktionen 264
 Punkt 143
 punktsymmetrische Funktion 294
 Pyramide 185
 Pyramidenstumpf 189

Q

Quader 181
 Quadranten 266
 Quadrantenrelationen 225
 quadratische Ergänzung 289
 quadratische Funktionen 283
 quadratische Gleichung 93
 Quadrupel, geordnetes 114
 qualitatives Merkmal 474

quantitatives Merkmal 474
 Quotientenregel 381

R

Radikand 51, 54
 rationale Zahl 24
 Rationalmachen des Nenners 58
 Rauminhalt von Rotationskörpern 432
 Realteil 539
 Rechenoperation 32
 – dritter Stufe 51
 – erster Stufe 32
 – zweiter Stufe 32
 Rechenschema von Horner 98
 Rechteckkoordinaten 546
 Rechte-Hand-Regel 560
 rechtwinkliges Dreieck 163
 rechtwinkliges Koordinatensystem 265
 reelle Achse 543
 reelle Zahl 23, 25
 Regel zum Konvertieren 27
 Regel von Sarrus 130
 Regressionsgerade 491
 Regressionskoeffizient 491
 regula falsi 108
 Reihe 344
 Relation 263
 relative Häufigkeit 465
 Repräsentant eines Vektors 563
 reziproke Zahl 33
 Richtung eines Vektors 560
 Richtungssinn 560
 Richtungsvektor 578
 Runden von Zahlen 31

S

Satz des Pythagoras 164
 Satz von Bayes 464
 Säulendiagramm 266
 Scheitelform einer quadratischen Funktion 286
 Scheitelwinkel 146
 Schnittpunkt zweier Geraden 280
 Schreibweise von Zahlen 30
 Sekantenverfahren 108
 sekundäre Verteilungstafel 476, 481
 senkrechter Schnitt zweier Geraden 282
 signifikante Ziffer 30
 Signifikanztest 511
 Signum 29
 Simpsonsche Regel 437
 Simulation 465
 Sinus 216

Sinusfunktion 308
 –, Maximum und Minimum 308
 Sinussatz 239
 Skalar 561
 Skalarprodukt 571
 –, Koordinatenform 572
 –, koordinatenfreie Form 573
 Spannvektoren 584
 Spannweite 475
 Spatprodukt 576
 Spiegelachse 272
 Spiegelung 148
 Sprungstelle 361
 Stammfunktion 413
 Standardabweichung 485, 498, 502
 standardisierte Normalverteilung 521
 Steigungsdreieck 276
 Steigungsfaktor einer Geraden 275
 Steigungswinkel einer Geraden 276
 Stereometrie 180
 Stichprobe 475
 Strahl 144
 Strecke 144
 Streckung, zentrische 154
 Streuung 484, 498, 516, 518, 525
 Streuungsmaß 480
 Stufenpunkt 390
 Stufensprung 351
 Stufenwinkel 146
 Stützstellen einer Funktion 298
 Stützvektor 578
 Stützwerte einer Funktion 298
 Substitutionsregel 430
 Subtraktion von Vektoren 564 ff.
 Summationsgrenze 49
 Summationsindex 49
 Summe, algebraische 35
 Summenregel 454
 Summenzeichen 49
 Surjektivität 270
 Symmetrie 150

T

Tangens 217
 Tangensfunktion 309
 Teilmenge 16
 –, echte 17
 Term 35
 Terrassenpunkt 390
 Tiefpunkt 389
 totale Wahrscheinlichkeit 462
 transzendente Gleichung 88, 99 f.
 Trend 492
 trigonometrische Form komplexer Zahlen 548

trigonometrische Funktion 217, 307
 trigonometrischer Pythagoras 231
 Tripel, geordnetes 114
 Tupel, n -, geordnetes 114

U

Umkehrfunktion 272
 – einer linearen Funktion 277
 unabhängige Variable einer Funktion 263
 unecht gebrochenrationale Funktion 302
 unechter Bruch 39
 Unendlichkeitsstelle 392
 ungerade Funktionen 293
 Ungleichung 110
 –, Definitionsbereich 111
 Unstetigkeit, hebbare 362
 Unstetigkeitsstelle 392
 untere Grenze 49
 untere Schranke 270
 Untermenge 17
 Untersumme 422
 Urliste 475
 Urnenmodell 453
 Ursprungsgerade 275

V

Variable 15, 86
 –, freie 86
 –, gebundene 86
 Varianz 498, 502
 Variation 451, 457
 – mit Wiederholung 457
 – ohne Wiederholung 457
 Variationskoeffizient 485
 Vektor 560
 –, Addition 564 f.
 –, Betrag 561
 –, Multiplikation 567
 –, Orientierung 560
 –, Repräsentant 563
 –, Richtung 560
 –, Subtraktion 564 ff.
 –, Vielfaches 567
 –, Winkel 569
 Vektoraddition 545
 Vektorgleichung einer Geraden 578
 vektorielle Beschreibung von Ebenen 583
 vektorielle Darstellung komplexer Zahlen 543
 Vektorparallelogramm 564
 Vektorprodukt 575
 Vereinigung 19
 verkettete Funktion 320
 Verschiebung 148
 Versor 549

Verteilungsfunktion 495, 525
 –, empirische 477
 Verteilungstafel 475
 –, primäre 476, 481
 –, sekundäre 476, 481
 Vielfaches eines Vektors 567
 Viereck 166
 Vierfeldertafel 460
 Vorzeichenregel 34
 Vorzugszahlen 351

W

Wachstumskonstante 324
 Wachstumstempo 350
 Wahrheitswert 14
 Wahrscheinlichkeit, bedingte 461
 –, totale 462
 Wahrscheinlichkeitsdichte 499, 518, 525
 Wahrscheinlichkeitsverteilung 495
 Wechselwinkel 146
 Wendepunkt 390
 Wertebereich einer Funktion W 263
 Wertetabelle 265
 Winkel 144
 Winkel zwischen Vektoren 569
 Wurzel 54
 Wurzelexponent 51, 54
 Wurzelfunktionen 295
 Wurzelgleichung 91
 Wurzelsatz von Vieta 96

Z

Zahl, entgegengesetzte 29, 33
 –, ganze 24
 –, irrationale 25
 –, natürliche 23
 –, rationale 24
 –, reelle 23, 25

–, reziproke 33
 –, Runden 31
 –, Schreibweise 30
 Zahlenfolge 341
 –, alternierende 343
 –, arithmetische 344
 –, divergente 356
 –, endliche 342 f.
 –, fallende 343, 348
 –, geometrische 348
 –, Glied einer 342
 –, grafische Darstellung 342
 –, Grenzwert einer 355
 –, konstante 343
 –, konvergente 356
 –, rekursive Darstellung 343 f., 348
 –, streng monoton fallend 343 f., 348
 –, streng monoton wachsend 343 f., 348
 –, tabellarische Darstellung 342
 –, unabhängige Darstellung 342, 344, 348
 –, unendliche 342 f.
 –, wachsende 343
 –, Wortdarstellung 342
 Zahlensystem 25
 zentralsymmetrisch 300
 zentrische Streckung 154
 Zielfunktion 398
 Ziffer 25
 –, signifikante 30
 Zinseszinsrechnung 351
 Zinsrechnung 47
 Zufallsexperiment 442
 Zufallsgröße 494, 502
 –, diskrete 515
 Zufallsversuch 442, 452
 zweireihige Determinante 126
 Zweiwertigkeit 14
 zyklometrische Funktionen 310
 Zylinder 190