

Inhaltsverzeichnis

I	Theoretische Grundlagen	15
1	Werkstoff-Phänomenologie	16
1.1	Spannungs-Dehnungs-Verhalten	16
1.2	Zeit-Verhalten	19
2	Einführung in die Kontinuumsmechanik	23
2.1	Eindimensionale Vorbetrachtungen	23
2.1.1	Konfiguration und Bewegung	24
2.1.2	Verschiebung und Längenänderung	25
2.1.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung	25
2.1.4	Deformations- und Verschiebungsgradient	26
2.1.5	Spannungsmaße	28
2.1.6	Materialgleichungen	29
2.2	Körper und Kontinuum	34
2.3	Kinematik	34
2.3.1	Konfiguration und Bewegung	35
2.3.2	Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld	41
2.3.3	Deformations-, Geschwindigkeits- und Verschiebungsgradient	46
2.3.4	Verzerrungstensoren	55
2.3.5	Geometrische Linearisierung von Verzerrungstensoren (Deformator)	65
2.4	Spannungszustand	71
2.4.1	Spannungsvektoren	71
2.4.2	Spannungstensoren	74
2.4.3	Hauptspannungen (Eigenwertproblem)	79
2.5	Bilanzgleichungen	84
2.5.1	Massebilanz	85
2.5.2	Impulsbilanz	87
2.5.3	Drehimpulsbilanz	91
2.5.4	Erster Hauptsatz der Thermodynamik (Energiebilanz)	94
3	Materialgleichungen (Materialtheorie)	98
3.1	Reduzierte Form einer allgemeinen Materialgleichung (Funktionale)	99

Inhaltsverzeichnis	9	
3.2	Elastizität	113
3.2.1	CAUCHY-Elastizität	113
3.2.2	GREEN- oder Hyper-Elastizität	119
3.2.3	HOOKE-Elastizität (streng-lineare Elastizität)	140
3.3	Lineare Viskoelastizität (eindimensional)	149
3.3.1	Rheologische Modell-Elemente (eindimensional)	150
3.3.2	Standard-Versuche	151
3.3.3	MAXWELL-Modell	155
3.3.4	KELVIN-VOIGT-Modell	165
3.3.5	Komplexere Rheologische Modelle	171
3.3.6	Verallgemeinerte Darstellungen	187
3.4	Lineare Viskoelastizität (dreidimensional)	190
3.4.1	Dreidimensionales MAXWELL-Modell	190
3.4.2	Verallgemeinerte Darstellungen	196
3.4.3	Spezielle Bewegungsgeschichten	201
3.4.4	Spezielle Relaxationsfunktion in COSMOS/M und ABAQUS	204
4	Randwertprobleme	206
4.1	Feldgleichungsset	206
4.2	Grundgleichung der linearen Elastokinetik	208
4.3	Grundgleichung der linearen Visko-Elastokinetik	209
5	Spezielle Tragwerke	211
5.1	Äquivalenzbedingungen	211
5.2	Linear-thermoelastische Stab- und Balkentheorie	213
5.2.1	Längsproblem (Zug/Druck)	213
5.2.2	Biegeproblem (ebene oder einachsige Biegung)	216
5.3	Linear-viskoelastische Stab- und Balkentheorie	219
5.3.1	Längsproblem (Zug/Druck)	219
5.3.2	Biegeproblem (ebene oder einachsige Biegung)	221
5.4	Linear-elastische Träger mit ringförmiger Querschnittsform	225
5.4.1	Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungszustand in Zylinderkoordinaten	225
5.4.2	HOOKEsches Materialgesetz in Zylinderkoordinaten	226
5.4.3	Verschiebungs-Verzerrungs-Gleichungen und Materialgesetz als Funktion der Verschiebungskoordinaten	227
5.4.4	Impulsbilanz (CAUCHY I) in Zylinderkoordinaten	227
5.4.5	Grundgleichung der Elastokinetik in Zylinderkoordinaten	228

II	Anwendungen	229
6	Finite Elemente Methode (FEM)	230
6.1	Einführung	230
6.2	FEM und Elementtypen in der Strukturmechanik	233
6.2.1	Analyseverfahren	233
6.2.2	Elementtypen	234
6.2.3	Einsatz und Anwendung der FE-Methode bei strukturmechanischen Problemen	236
6.2.4	Form der FE-Gleichungen	238
6.2.5	Grundgedanke der FEM am Beispiel eines Stabwerks demonstriert	241
6.2.6	Zusammenfassung der FEM-Systematik	256
6.3	Energie-, Arbeits- und Näherungssätze in der FEM	257
6.3.1	Einführung	257
6.3.2	Einfaches Beispiel für das Energieprinzip „Totales Potential“	259
6.3.3	Bestimmung des Gesamtgleichungssystems für das in Bild 6.5 abgebildete Beispiel mit Hilfe des „Totalen Potentials“	261
6.3.4	Prinzip der virtuellen Arbeit	263
6.3.5	Näherungsansätze	264
6.3.6	Variationsansätze	265
6.3.7	Notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Minimums	266
6.4	Variationsverfahren nach RAYLEIGH-RITZ	271
6.5	Aufstellen der Systemgleichungen mit Hilfe von Ansatzfunktionen	275
6.5.1	Stabelement	277
6.5.2	Steifigkeitsermittlung mit Hilfe einer Ansatzfunktion	277
6.5.3	Potentielle Energie eines Elements und äquivalente Knotenkräfte	281
6.5.4	Temperatureinfluss und äquivalente Temperaturlasten	283
6.5.5	Gesamtenergie oder totales Potential eines Elements	285
6.5.6	Zusammenbau der Einzelemente, Minimierung der Gesamtenergie bzw. des totalen Potentials und deren Lösung	285
6.5.7	Anwendung an Beispielen und Vergleich mit den exakten Lösungen	288
6.6	FE-Formulierung eines Balkenelements	295
6.7	Höherwertige Elemente	304
6.7.1	Höherwertiges Stabelement mit drei Knoten	305
6.7.2	Anwendung des 3-Knoten-Stabelements	308
6.8	Isoparametrisches Konzept	312
6.8.1	Beispiel zum Isoparametrischen Konzept	318
6.9	Kurzeinführung in die Numerische Integration	320
6.9.1	Numerische Integration von Zeitverläufen	326
6.9.2	NEWMARK-BETA Method	330
6.9.3	CHOLESKY-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit symm. Matrizen	331

Inhaltsverzeichnis	11	
6.10	Einblick in die nichtlineare Finite-Element-Methode	335
6.10.1	Einleitung	335
6.10.2	Arten der Nichtlinearitäten	335
6.10.3	Grenzen der Elastizitätstheorie der 1. Ordnung (Beispiele)	336
6.10.4	Einführung in die iterative Lösungsmethode für nichtlineare Probleme	338
6.10.5	NEWTON-RAPHSON-Verfahren	339
7	Elementwahl, Transfer von CAD- und Messdaten in ein FE-Programm	345
7.1	Auswahl zwischen linearen Elementen (constant strain) und Elementen höherer Ordnung	345
7.1.1	Linear-Elemente (constant strain elements)	346
7.1.2	Elemente mit Zwischenknoten (quadratic elements with midside nodes), Ele- mente höherer Ordnung	346
7.2	Transfer von CAD- und Messdaten in ein FE-Programm	349
7.3	Formoptimierung eines Aorten-Aneurysmen-Prüfkörpers	351
7.4	Strukturverhalten einer Stahlbaukonstruktion	352
7.5	Blatt- bzw. Dreiecksfeder	354
7.6	Gewichtsoptimierter gelochter Kragträger	355
8	Viskoelastische Stab- und Balkentragwerke	357
8.1	POYNTING-THOMSON-Stab bei wechselnder Dehnrate	357
8.1.1	Analytische Rechnungen	357
8.1.2	FE-Rechnungen	362
8.2	MAXWELL-Stab bei harmonischer Dehngeschichte	364
8.2.1	Analytische Rechnungen	364
8.2.2	FE-Rechnungen	369
8.3	Stäbe unter zeitlich konstanter Last (Stab-Kriechen)	370
8.4	Balken unter konstanter Last (Biege-Kriechen)	373
8.4.1	Analytische Rechnungen	374
8.4.2	FE-Rechnungen	377
8.5	Balken unter konstanter Verformung (Biege-Relaxieren)	379
8.6	Vier-Punkt-Biegung balkenförmiger Bauteile	382
9	Rotationssymmetrische linear-elastische Trägerstrukturen	387
9.1	Dickwandiger Hohlzylinder unter radialer Druckbelastung	387
9.1.1	Gleichungssatz	387
9.1.2	Randwertproblem	389
9.1.3	Lösung der Verschiebungsdifferentialgleichung –radiale Verschiebungs- koordinate	391
9.1.4	Verzerrungs- und Spannungskoordinaten	392

9.2	Geschlossener Hohlzylinder unter radialer Druckbelastung	394
9.2.1	Gleichungssatz	394
9.2.2	Randwertproblem	396
9.2.3	Spannungs- und Verschiebungszustand	397
9.2.4	FE-Rechnungen	397
9.3	Rotierende Scheibe (Welle-Scheibe-Verbindung)	400
9.3.1	Gleichungssatz	400
9.3.2	Bewegungsgleichung und deren Lösung	402
9.3.3	Spannungen, Dehnungen und radiale Verschiebung	404
9.3.4	FE-Rechnungen	406
9.4	Formoptimierung rotierender elastischer Scheiben	409
9.4.1	Optimierungsbedingung	409
9.4.2	Formoptimierte Scheibendicke	411
9.4.3	FE-Rechnungen	411
9.5	Viskoelastische Dämmschicht	413
9.5.1	Randwertproblem	413
9.5.2	Gleichungssatz	414
9.5.3	Radiale Verschiebungsordinate und Spannungskoordinaten	416
9.5.4	FE-Rechnung	417
10	Polymere Weichschaumstoffe	420
10.1	Motivation	420
10.2	Materialgesetz	420
10.3	Materialidentifikation am Beispiel der uniaxialen Stauchung	421
10.3.1	Kraft-Streckungs-Relation	421
10.3.2	Bestimmung der Materialparameter	423
10.4	FE-Simulation	425
A	Mathematische Grundlagen	426
A.1	Vektor- und Tensoralgebra	426
A.1.1	(Einige) Rechenregeln für Vektoren	427
A.1.2	Definition des Tensors (Dyade)	428
A.1.3	Wichtige Rechenregeln für Dyaden und Tensoren	430
A.1.4	Invarianten	434
A.1.5	CAYLEY-HAMILTON-Gleichung (Arthur CAYLEY, engl. Math., 1821-1895, Sir William Rowan HAMILTON, irischer Math., 1805-1865) . .	436
A.1.6	Darstellung von Vektoren und Tensoren bezüglich kartesischer Koordinaten	437
A.2	Vektor- und Tensoranalysis	444
A.2.1	Ableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion nach der Zeit	444
A.2.2	Ableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion nach dem Argumenttensor .	444
A.2.3	Ableitung einer vektorwertigen Vektorfunktion nach dem Argumentvektor .	445
A.2.4	Rechenoperationen mit dem NABLA-Operator	446

Inhaltsverzeichnis	13
A.2.5 GAUSSscher Integralsatz (Carl Friedrich Gauß, dt. Mathematiker, 1777 – 1855)	448
A.2.6 Vektor- und Tensorfelder in Zylinderkoordinaten	449
Literaturverzeichnis	452
Index	455