Inhalt

1 Statistische Entscheidungen und Verteilungsklassen 1

1.1 Statistische Entscheidungen. 1
1.1.1 Problemstellung. 1
1.1.2 Verteilungsannahme 4
1.1.3 Entscheidungsraum; Verlust- und Risikofunktion 11
1.2 Schätz- und Testprobleme 17
1.2.1 Quantilfunktion. 18
1.2.2 Punktschätzer. 23
1.2.3 Tests; Gütefunktionen 35
1.2.4 Tests bei Normalverteilungen mit geschätzten Nebenparametern. . . . 45
1.2.5 Entscheidungskerne und deren Vergleichbarkeit 50
1.3 Optimierungstheoretische Formulierung statistischer Entscheidungsprobleme 55
1.3.1 Unverzerrtheit bei Schätz- und Testproblemen. 56
1.3.2 Lagrange-Funktion und duale Optimierungsprobleme. 62
1.3.3 Ein einfacher Dualitätssatz. 71
1.4 Spieltheoretische Formulierung statistischer Entscheidungsprobleme 75
1.4.1 Zweipersonen-Nullsummenspiele 76
1.4.2 Entscheidungsregeln; Minimax- und Bayes-Optimalität 82
1.5 Lineare Modelle und Normalverteilungsfamilien 89
1.5.1 Lineare Modelle, qualitative und quantitative Faktoren 91
1.5.2 Mehrdimensionale Normalverteilungen 95
1.5.3 Lineare Modelle mit Normalverteilungsannahme 102
1.6 Dominierte Klassen; Bedingte Verteilungen. 104
1.6.1 Lebesgue-Zerlegung, Dichtequotient, Dichte 104
1.6.2 Bedingungskerne 114
1.6.3 Faktorisierung 119
1.6.4 Bedingungskerne bei Dominiertheit; bedingte Dichten 127
1.6.5 Dominierte Klassen und ihre Dichten. 130
1.6.6 Abstandsmaße für Dichten; Dominiertheit und Separabilität 135
1.7 Exponentialfamilien 143
1.7.1 Definition und Beispiele 143
1.7.2 Analytische Eigenschaften 150
1.7.3 Informationsmatrix und Mittelwertparametrisierung 153
1.7.4 Bedingte Verteilungen 159
1.8 $\mathbb{L}_r$-differenzierbare Verteilungsklassen. 162
1.8.1 $\mathbb{L}_1$-Differenzierbarkeit und Differentiation von Gütefunktionen 163
1.8.2 $\mathbb{L}_1$-Differenzierbarkeit einparametriger Verteilungsklassen 168

1.8.3 $\mathbb{L}_r$-Differenzierbarkeit k-parametriger Verteilungsklassen 173
1.8.4 Bedingungen für $\mathbb{L}_r$-Differenzierbarkeit; Informationsmatrix 179

2 Test- und Schätzprobleme als Optimierungsaufgaben 188

2.1 Einführung in die Neyman-Pearson-Theorie 188
2.1.1 Signifikanztests 188
2.1.2 Testen einfacher Hypothesen: Neyman-Pearson-Lemma 192
2.1.3 Ein- und Zweistichprobentests bei Normalverteilungen 200
2.1.4 Einige Existenzaussagen über optimale Tests 204
2.2 Optimale einseitige Tests bei einparametrigen Verteilungsklassen 209
2.2.1 Einseitige Tests bei isotonem Dichtequotienten 210
2.2.2 Stochastisch geordnete Verteilungsklassen 213
2.2.3 Einige spezielle Verteilungsklassen 217
2.2.4 Lokal beste einseitige Tests 221
2.3 Übergang von einfachen Hypothesen zu robusten Tests 227
2.3.1 Bayes- und Minimax-Tests für einfache Hypothesen 227
2.3.2 Ungünstigste Paare zum Testen zusammengesetzter Hypothesen 234
2.3.3 Robustifizierte Tests für einfache Hypothesen 241
2.3.4 Robustifizierte Tests bei isotonem Dichtequotienten 251
2.4 Optimale zweiseitige Tests bei einparametrigen Verteilungsklassen 254
2.4.1 Verallgemeinertes Fundamentallemma 254
2.4.2 Zweiseitige Tests in einparametrigen Exponentialfamilien 256
2.4.3 Lokal beste zweiseitige Tests 264
2.5 Optimale Tests und ungünstigste a priori Verteilungen 267
2.5.1 Optimale Signifikanztests 267
2.5.2 Reduktion zusammengesetzter Hypothesen auf einfache Hypothesen . 274
2.5.3 Bayes- und Minimax-Tests für zusammengesetzte Hypothesen 281
2.6 Optimale Bereichsschätzfunktionen 289
2.7 Optimale Punktschätzfunktionen 299
2.7.1 Erwartungstreue Schätzer mit endlichen Varianzen 299
2.7.2 Verallgemeinerungen der Cramér-Rao-Ungleichung 310
2.7.3 Bayes- und Minimax-Schätzer 321

3 Reduktionsprinzipien: Suffizienz und Invarianz 329

3.1 Suffiziente σ-Algebren und suffiziente Statistiken 329
3.1.1 Einführende Überlegungen und Beispiele 330
3.1.2 Definition und Übergang zu Bedingungskernen 334
3.1.3 Suffizienz bei dominierten Klassen; Neyman-Kriterium 343
3.1.4 Erste Anwendungen in der Statistik 348
3.2 Vollständige Verteilungsklassen 353
3.2.1 Definition; Anwendung in der Schätztheorie 353
3.2.2 Exponentialfamilien und Klassen von Produktmaßen 355
3.2.3 Minimalsuffizienz und Vollständigkeit 361

3.3 Optimale Tests in mehrparametrigen Exponentialfamilien 365
3.3.1 Tests mit Neyman-Struktur 367
3.3.2 Bedingte Tests in Exponentialfamilien 373
3.3.3 Die Tests von Fisher und McNemar 379
3.3.4 Konfidenzschätzer bei mehrparametrigen Exponentialfamilien 386
3.4 Ein- und zweiseitige Tests bei Normalverteilungen 387
3.4.1 Transformation auf nicht-bedingte Tests 388
3.4.2 Tests zur Prüfung von Varianzen 391
3.4.3 t-Tests in linearen Modellen 393
3.4.4 t-Tests zur Prüfung von Mittelwerten 396
3.4.5 t-Tests zur Prüfung von Regressions- und Korrelationskoeffizienten . . 397
3.5 Reduktion durch Invarianz 401
3.5.1 Invariante Entscheidungsprobleme 401
3.5.2 Maximalinvariante Statistiken 406
3.5.3 Einige invariante Tests und äquivariante Bereichsschätzer 414
3.5.4 $\mathfrak{P}$-fast invariante Statistiken 423
3.5.5 Der Satz von Hunt-Stein 428
3.5.6 Pitman-Schätzer 436
3.5.7 Der Satz von Girshick-Savage 446

4 Lineare Modelle und multivariate Verfahren 452

4.1 Schätztheorie in linearen Modellen 452
4.1.1 Kleinste-Quadrate-Schätzer; Satz von Gauß-Markov 452
4.1.2 Aitken-Schätzer und linear schätzbare Funktionale 458
4.2 Tests und Konfidenzschätzer bei linearen Hypothesen 461
4.2.1 F-Tests und Konfidenzellipsoide 462
4.2.2 Varianzanalyse 469
4.2.3 Regressions- und Kovarianzanalyse 473
4.3 Varianzkomponenten-Modelle 479
4.3.1 Problemstellung und Hilfsmittel 479
4.3.2 Varianzkomponenten-Modelle als Exponentialfamilien 484
4.3.3 Schätzen und Testen in Varianzkomponenten-Modellen 491
4.4 Elemente der multivariaten Analyse 498
4.4.1 Multivariate lineare Modelle 498
4.4.2 Hotelling T^2-Test 504

Anhang A: Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen in Stichworten 512

Hinweise zur Lehrbuchliteratur 527

Sachverzeichnis 529