

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Einführung</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Aufgaben der Statik .....  | 1         |
| 1.2 Zur Entwicklung der Rechenhilfsmittel und Verfahren der Statik . | 1         |
| 1.3 Rechenprogramme in Forschung, Praxis und Lehre .....             | 3         |
| 1.4 Folgerungen für die Lehre .....                                  | 4         |
| 1.5 Gegenstand und Ziel des vorliegenden Buches .....                | 4         |
| 1.6 Vorkenntnisse des Lesers .....                                   | 5         |
| <br>   |           |
| <b>2 Grundzüge der Modellbildung für Stabtragwerke</b>               | <b>7</b>  |
| 2.1 Tragwerke und ihr Aufbau .....                                   | 7         |
| 2.2 Bauteile als Sonderformen dreidimensionaler Körper .....         | 7         |
| 2.3 Bauteilverbindungen .....  | 9         |
| 2.4 Koordinatensysteme .....   | 11        |
| 2.5 Lager und Stützungen .....                                       | 13        |
| 2.6 Einwirkungen .....   | 14        |
| 2.7 Struktur der Grundgleichungen der Statik .....                   | 15        |
| 2.8 Stufen der Modellbildung in der Statik .....                     | 16        |
| 2.9 Elementkonzept als Grundlage der Tragwerksanalyse .....          | 19        |
| <br>   |           |
| <b>3 Vom Kontinuum zum Stab</b>                                      | <b>25</b> |
| 3.1 Vorbemerkung .....   | 25        |
| 3.2 Grundgleichungen des linear elastischen Kontinuums .....         | 26        |
| 3.2.1 Annahmen .....   | 26        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.2.2 Kinematik .....   | 26        |
| 3.2.3 Stoffgesetz .....   | 29        |
| 3.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gleichgewicht) .....   | 30        |
| 3.2.5 Zusammenfassung der Grundgleichungen .....  | 36        |
| <b>3.3 Grundgleichungen der Biegung und Torsion des Stabes .....</b>  | <b>40</b> |
| 3.3.1 Annahmen der Stabtheorie .....  | 40        |
| 3.3.2 Kinematik (Reduktion Kontinuum - Stabachse) .....   | 44        |
| 3.3.3 Stoffgesetz .....   | 46        |
| 3.3.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) .....   | 47        |
| 3.3.4.1 Ausgangsformulierung .....  | 47        |
| 3.3.4.2 Virtuelle innere Arbeit im beliebigen Bezugssystem .....  | 47        |
| 3.3.4.3 Virtuelle innere Arbeit im Hauptachsensystem .....  | 52        |
| 3.3.4.4 Virtuelle äußere Arbeit im Hauptachsensystem .....  | 54        |
| 3.3.4.5 Resultierende Formulierung für den geraden Stab .....   | 57        |
| <br>  |           |
| <b>4 Elementbeziehungen des eben beanspruchten Stabes .....</b>   | <b>59</b> |
| 4.1 Vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu den lokalen<br>Grundgleichungen (Dgln.) und statischen Randbedingungen ... | 60        |
| 4.1.1 Lokale Grundgleichungen (Differentialgleichungen) .....   | 62        |
| 4.1.2 Lösungen der Differentialgleichungen .....  | 63        |
| 4.2 Bezeichnungen und Definitionen .....  | 65        |
| 4.2.1 Zustandsgößen und Vorzeichen-Konventionen .....   | 65        |
| 4.2.2 Definition von Elementmatrizen .....  | 67        |
| 4.3 Steifigkeitswerte von Stäben .....  | 70        |
| 4.3.1 PvV als Grundlage zur Ermittlung der Stabsteifigkeiten .....  | 70        |
| 4.3.2 Steifigkeitswerte und Lastanteile des Fachwerkstabes .....  | 71        |
| 4.3.3 Steifigkeitswerte und Lastanteile des Biegeträgers .....  | 74        |
| 4.3.4 Näherungsweise Ermittlung der Steifigkeiten .....   | 82        |
| 4.4 Übertragungsmatrix .....  | 88        |
| 4.4.1 Zustandsgößen und Grundgleichungen .....  | 88        |
| 4.4.2 Übertragungsmatrix des Balkenelements .....   | 91        |
| 4.4.3 Lastspalten .....   | 92        |
| 4.4.4 Ermittlung von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{U}$ mittels direkter Reihenintegration .....                                 | 94        |
| 4.5 Nachgiebigkeitsmatrix .....   | 95        |
| 4.6 Ermittlung von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{U}$ mit Hilfe analytischer Lösungen .....                                      | 96        |
| 4.7 Übersicht: Wege zur Ermittlung von Element-Eigenschaften<br>(Steifigkeits- und Übertragungsmatrizen) .....              | 98        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>5 Kraftgrößen statisch bestimmter ebener Tragwerke</b>                                    | <b>99</b>  |
| 5.1 Übersicht .....  | 99         |
| 5.2 Transformationsbeziehungen in der Ebene .....  | 103        |
| 5.2.1 Zustandsgrößen .....   | 103        |
| 5.2.2 Einwirkungen .....   | 104        |
| 5.3 Stäbe und Stabzüge .....   | 106        |
| 5.3.1 Fachwerkstäbe .....  | 106        |
| 5.3.2 Biegestäbe .....   | 107        |
| 5.3.3 Rahmenstäbe .....  | 114        |
| 5.3.4 Geknickte Rahmenstäbe .....  | 115        |
| 5.3.5 Verzweigte Rahmenstäbe .....   | 118        |
| 5.4 Zusammengesetzte Systeme .....   | 123        |
| 5.4.1 Übersicht .....  | 123        |
| 5.4.2 Fachwerke .....  | 123        |
| 5.4.3 Rahmen .....   | 126        |
| 5.4.4 Zur statischen Bestimmtheit ebener Fachwerke und Rahmen .....                          | 130        |
| 5.5 Zur Berechnung von Weggrößen (Hinweise) .....  | 132        |
| <br>   |            |
| <b>6 Drehwinkelverfahren als Sonderfall des Weggrößenverfahrens</b>                          | <b>133</b> |
| 6.1 Einführung, geometrische Unbestimmtheit .....  | 133        |
| 6.2 Lösungsweg des Drehwinkel-Verfahrens .....   | 135        |
| 6.2.1 Aufbau in Schritten .....  | 135        |
| 6.2.2 Einseitig eingespannter Träger als modifiziertes Grundelement .....                    | 141        |
| 6.2.3 Übersicht: Vorgehensweise beim Drehwinkelverfahren .....                               | 142        |
| 6.3 Zahlenbeispiel: Berechnung eines Durchlaufträgers .....                                  | 143        |
| <br>   |            |
| <b>7 Weggrößenverfahren</b>  | <b>147</b> |
| 7.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Grundlage<br>des Weggrößenverfahrens ..... | 147        |
| 7.2 Transformation von Zustandsgrößen .....  | 148        |
| 7.3 Systemberechnung durch Bilden von Knotengleichgewicht .....                              | 151        |
| 7.3.1 Einführung .....   | 151        |

|  |            |
|--|------------|
| 7.3.2 Systemberechnung eines ebenen Rahmens .....                        | 152        |
| 7.3.3 Übersicht: Vorgehensweise beim Weggrößenverfahren .....            | 157        |
| 7.4 Beispiel der Berechnung eines ebenen Rahmens .....                   | 158        |
| 7.5 Systemberechnung mit Hilfe von Inzidenztafeln .....                  | 166        |
| 7.5.1 Einführung der Inzidenzmatrix .....                                | 166        |
| 7.5.2 Inzidenztafel mit Beispielen und programmtechnische Realisierung   | 168        |
| 7.5.3 Eigenschaften der Gesamtsteifigkeitsmatrix .....                   | 171        |
| 7.6 Kopplung von Freiheitsgraden (Teilelimination) .....                 | 174        |
| 7.6.1 Einführung .....   | 174        |
| 7.6.2 Kopplung auf Elementebene .....                                    | 174        |
| 7.6.3 Kopplung auf Systemebene .....                                     | 177        |
| 7.6.4 Einführung von Koppel-Matrizen .....                               | 177        |
| 7.6.5 Darstellung am Beispiel eines Hallenrahmens .....                  | 178        |
| 7.6.6 Beispiel: Einbau von kinematischen Abhängigkeiten .....            | 181        |
| 7.7 Substrukturtechnik .....   | 186        |
| <b>8 Tragverhalten spezieller Stabtragwerke</b>                          | <b>189</b> |
| 8.1 Genäherte Berechnung elastisch gebetteter Balken .....               | 189        |
| 8.1.1 Numerisches Lösungsverhalten am Beispiel eines Fundamentbalkens    | 189        |
| 8.1.2 Biegemomente des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten   | 192        |
| 8.1.3 Querkräfte des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten ... | 194        |
| 8.2 Analytische Berechnung elastisch gebetteter Balken .....             | 195        |
| 8.2.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen .....                        | 196        |
| 8.2.2 Beispiel zum Tragverhalten: Kanalquerschnitt .....                 | 199        |
| 8.3 Ebene Fachwerke .....  | 201        |
| 8.3.1 Grundgleichungen und Lösungen .....                                | 201        |
| 8.3.2 Besonderheiten bei der Modellbildung von Fachwerksystemen ....     | 202        |
| 8.3.3 Beispiel zum Tragverhalten: Nagelbinder aus Holz .....             | 203        |
| 8.4 Ebene Rahmen .....   | 205        |
| 8.4.1 Grundgleichungen und Lösungen .....                                | 205        |
| 8.4.2 Beispiele zum Tragverhalten einfeldriger Rahmen .....              | 206        |
| 8.4.2.1 Auswirkungen verschiedener statischer Systeme .....              | 206        |
| 8.4.2.2 Auswirkungen verschiedener Steifigkeitsverhältnisse .....        | 210        |
| 8.4.2.3 Beispiel einfeldriger Rahmen: Untersuchung von Rahmenecken       | 212        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>9 St. Venant'sche Torsion von Stäben</b>                       | <b>213</b> |
| 9.1 Vorbemerkung  | 213        |
| 9.2 Annahmen  | 214        |
| 9.3 Grundgleichungen  | 215        |
| 9.3.1 Herleitung über eine Verwölbungsfunktion                    | 215        |
| 9.3.1.1 Kinematik der Verschiebungen; Spannungen                  | 215        |
| 9.3.1.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gleichgewicht)     | 217        |
| 9.3.2 Herleitung über eine Spannungsfunktion                      | 223        |
| 9.3.2.1 Differentialgleichung; Randbedingungen                    | 224        |
| 9.3.2.2 Integrale Formulierung                                    | 225        |
| 9.3.3 Einfluss der Drehachse auf die Verwölbung                   | 229        |
| 9.3.4 Zusammenstellung maßgebender Beziehungen                    | 231        |
| 9.4 Membrananalogie   | 233        |
| 9.5 Stab mit Rechteckquerschnitt                                  | 234        |
| 9.6 Stäbe mit dünnwandigem offenen Querschnitt                    | 240        |
| 9.6.1 Torsionsträgheitsmoment                                     | 240        |
| 9.6.2 Verwölbung  | 241        |
| 9.6.3 Abschnittsweise gekrümmte Wandabschnitte (Hinweise)         | 246        |
| 9.7 Zum Tragverhalten tordierter Stäbe mit beliebigem Querschnitt | 247        |
| 9.7.1 Schubspannungslinien  | 247        |
| 9.7.2 Einzellige dünnwandige Querschnitte (Bredt'sche Torsion)    | 249        |
| 9.7.3 Mehrzellige dünnwandige Querschnitte (Hinweise)             | 253        |
| 9.7.4 Dünnwandige offene Querschnitte                             | 254        |
| 9.8 Zusammenstellung maßgebender Beziehungen                      | 255        |
| <b>10 Räumlich beanspruchte Stäbe</b>                             | <b>257</b> |
| 10.1 Annahmen und Berechnungsmodelle                              | 257        |
| 10.2 Kinematik  | 260        |
| 10.3 Stoffgesetze   | 264        |
| 10.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Stab           | 265        |
| 10.4.1 Formulierung für ein beliebiges Bezugssystem               | 265        |
| 10.4.2 Virtuelle innere Arbeit im beliebigen Bezugssystem         | 268        |
| 10.4.3 Virtuelle innere Arbeit im Hauptachsensystem               | 273        |
| 10.4.4 Virtuelle äußere Arbeit im Hauptachsensystem               | 275        |

|  |            |
|--|------------|
| 10.4.5 Resultierende Formulierung .....                                  | 276        |
| 10.5 Differentialgleichungen, Kräfte- und Randbedingungen, Schnittgrößen | 276        |
| 10.5.1 Stäbe mit dünnwandigem offenen Querschnitt unter Wölbkrafttorsion | 276        |
| 10.5.2 Stäbe mit gedrungenem Querschnitt unter St. Venant'scher Torsion  | 282        |
| 10.6 Berechnung von Spannungsresultierenden und Spannungen .             | 285        |
| 10.6.1 Mechanische Erörterung von Bimoment und Linienbimoment ....       | 285        |
| 10.6.2 Spannungsresultierende und Verzerrungen der Stabachse .....       | 290        |
| 10.6.3 Normalspannungen .....  | 291        |
| 10.6.4 Schubspannungen .....   | 292        |
| 10.7 Ergänzende und weiterführende Hinweise .....                        | 295        |
| <br>   |            |
| <b>11 Elementbeziehungen des räumlich beanspruchten Stabes</b>           | <b>299</b> |
| 11.1 Vorbemerkung .....  | 299        |
| 11.2 Torsionsträgheitsmoment der St. Venant'schen Torsion .....          | 299        |
| 11.3 Stäbe ohne Behinderung der Verwölbung aus Torsion .....             | 305        |
| 11.3.1 Positive Wirkungsrichtung von Zustandsgrößen und Einwirkungen     | 305        |
| 11.3.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren .....                         | 308        |
| 11.3.3 Steifigkeitsmatrix und Volleinspann-Schnittgrößen .....           | 310        |
| 11.4 Stäbe mit Behinderung der Verwölbung aus Torsion .....              | 312        |
| 11.4.1 Positive Wirkungsrichtung von Zustandsgrößen und Einwirkungen     | 312        |
| 11.4.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren .....                         | 315        |
| 11.4.2.1 Entwicklung aus dem Fundamentalsystem der Dgl. (Torsion)        | 315        |
| 11.4.2.2 Lösung mit Matrizenreihen (Torsion) .....                       | 318        |
| 11.4.2.3 Resultierende Elementmatrizen .....                             | 319        |
| 11.4.3 Steifigkeitsmatrix und Volleinspann-Schnittgrößen .....           | 319        |
| 11.4.3.1 Ermittlung aus Übertragungsmatrix und Lastvektoren (Torsion)    | 320        |
| 11.4.3.2 Genäherte Steifigkeitmatrix und Lastvektoren (Torsion) ....     | 321        |
| 11.4.3.3 Resultierende Elementmatrizen .....                             | 326        |
| <br>   |            |
| <b>12 Kraftgrößen statisch bestimmter räumlicher Tragwerke</b>           | <b>329</b> |
| 12.1 Übersicht .....   | 329        |
| 12.2 Transformationsbeziehungen im Raum .....                            | 331        |
| 12.2.1 Systematik .....  | 331        |
| 12.2.2 Transformation .....  | 333        |
| 12.3 Stäbe und Stabzüge .....  | 334        |

|  |            |
|--|------------|
| Inhaltsverzeichnis   | XIII       |
| 12.3.1 Zur Berechnung von Lager- und Verbindungsreaktionen | 334        |
| 12.3.2 Torsionsstäbe                                       | 336        |
| 12.3.3 Trägerroststäbe                                     | 339        |
| 12.3.4 Verzweigte Trägerroststäbe                          | 340        |
| 12.3.5 Räumlich geknickte Stabzüge                         | 342        |
| 12.4 Zusammengesetzte Systeme                              | 347        |
| 12.4.1 Ebene, räumlich beanspruchte Rahmen und Trägerroste | 347        |
| 12.4.2 Räumliche Rahmen                                    | 349        |
| 12.4.3 Zur statischen Bestimmtheit räumlicher Rahmen       | 350        |
| <b>13 Räumliche Stabtragwerke (Weggrößenverfahren)</b>     | <b>353</b> |
| 13.1 Vorbemerkung  | 353        |
| 13.2 Transformationsbeziehungen                            | 353        |
| 13.3 Systeme mit St. Venant'scher Torsion                  | 357        |
| 13.3.1 Räumliche Rahmen                                    | 357        |
| 13.3.2 Räumlich beanspruchte ebene Tragwerke               | 361        |
| 13.3.3 Trägerroste   | 364        |
| 13.3.4 Durchlaufträger                                     | 368        |
| 13.4 Systeme mit Wölbkrafttorsion                          | 373        |
| 13.4.1 Vorbemerkung  | 373        |
| 13.4.2 Torsionsträger mit Kragarm                          | 373        |
| 13.4.3 Stütze unter exzentrischer Einzellast               | 377        |
| 13.4.4 Trägerroste   | 383        |
| <b>14 Einflusslinien</b>                                   | <b>389</b> |
| 14.1 Vorbemerkung  | 389        |
| 14.2 Ermittlung von Einflusslinien                         | 391        |
| 14.2.1 Die Sätze von Betti und Maxwell-Mohr                | 391        |
| 14.2.2 Einflusslinien für Weggrößen                        | 393        |
| 14.2.3 Einflusslinien für Schnittgrößen                    | 394        |
| 14.2.4 Einflusslinien für Auflagerkräfte                   | 396        |
| 14.3 Beispiel  | 397        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>15 Strukturberechnung mit dem Kraftgrößenverfahren</b>  | <b>401</b> |
| 15.1 Allgemeines   | 401        |
| 15.1.1 Zur Methode   | 401        |
| 15.1.2 Einführungsbeispiel   | 402        |
| 15.1.3 Ergänzungsarbeit (konjugierte Formänderungsarbeit)  | 403        |
| 15.1.4 Prinzip der virtuellen Kräfte   | 404        |
| 15.2 Das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabtragwerke   | 405        |
| 15.2.1 Innere virtuelle Ergänzungsarbeit   | 405        |
| 15.2.2 Äußere virtuelle Ergänzungsarbeit   | 406        |
| 15.2.3 Zusammenfassung zum Prinzip der virtuellen Kräfte   | 407        |
| 15.2.4 Eben beanspruchte Stabtragwerke   | 408        |
| 15.3 Vom Prinzip der virtuellen Kräfte zu den lokalen Grundgleichungen (Dgln.) und kinematischen Randbedingungen | 408        |
| 15.4 Ermittlung diskreter Weggrößen: Arbeitssatz und Reduktionssatz  | 412        |
| 15.4.1 Arbeitssatz   | 412        |
| 15.4.2 Beispiel: Statisch bestimmter Zweifeldträger mit Gelenk   | 412        |
| 15.4.3 Beispiel: Statisch bestimmter federnd gelagerter Träger mit Gelenk  | 414        |
| 15.4.4 Reduktionssatz  | 415        |
| 15.4.5 Beispiel: Statisch unbestimmter Zweifeldträger  | 416        |
| 15.5 Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke  | 418        |
| 15.5.1 Herleitung der Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten   | 418        |
| 15.5.2 Übersicht: Vorgehensweise beim Kraftgrößenverfahren   | 421        |
| 15.5.3 Beispiel: Rahmen  | 422        |
| 15.5.4 Wechselnde statisch bestimmte Hauptsysteme  | 426        |
| 15.5.5 Statisch unbestimmte Hauptsysteme   | 428        |

|  |                |
|--|----------------|
| Inhaltsverzeichnis   | XV             |
| <b>Anhang A1: Integralsätze</b>  | <b>431</b>     |
| A1-1 Partielle Integration (Teilintegration) .....   | 431            |
| A1-2 Flächenintegral - Linienintegral .....  | 431            |
| A1-3 Gauß'scher Integralsatz (Divergenz-Theorem):<br>Volumenintegral - Flächenintegral ..... | 434            |
| <br><b>Anhang A2: Matrizenreihen und Systeme von Dgln. 1. Ordnung</b>                        | <br><b>437</b> |
| A2-1 Vorbemerkung .....  | 437            |
| A2-2 Gewöhnliche Dgln. als Systeme von Dgln. 1. Ordnung .....                                | 437            |
| A2-3 Matrizenreihen .....  | 438            |
| A2-4 Lösung von Systemen von Dgln. 1. O. mittels Matrizenreihen .                            | 441            |
| <br><b>Anhang A3: Hauptachsentransformation</b>  | <br><b>443</b> |
| A3-1 Dünnwandige offene Querschnitte .....   | 443            |
| A3-1.1 Ausgangszustand: beliebiges Bezugssystem .....  | 443            |
| A3-1.2 Übergang zum allgemeinen Schwerachsensystem .....                                     | 446            |
| A3-1.3 Schubmittelpunkt im allgemeinen Schwerachsensystem .....                              | 447            |
| A3-1.4 Übergang zum Hauptachsensystem .....  | 450            |
| A3-1.5 Zahlenbeispiel: Dünnwandiger offener Querschnitt .....                                | 453            |
| A3-2 Vollquerschnitte .....  | 457            |
| A3-2.1 Ausgangszustand: beliebiges Bezugssystem .....  | 457            |
| A3-2.2 Übergang zum allgemeinen Schwerachsensystem .....                                     | 460            |
| A3-2.3 Übergang zum Hauptachsensystem .....  | 461            |
| A3-2.4 Zahlenbeispiel: Gedrungener Querschnitt .....   | 462            |
| A3-2.5 Schubmittelpunkt im Hauptachsensystem (Hinweise) .....                                | 463            |
| A3-3 Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften .....                                       | 464            |
| <br><b>Literatur</b>   | <br><b>467</b> |
| <br><b>Sachverzeichnis</b>   | <br><b>471</b> |