

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)</b>	<b>6</b>
2.1	Portfolio-Selection . . . . .	7
2.1.1	Die Beurteilung einzelner Anlageformen . . . . .	7
2.1.2	Effiziente Portfolios . . . . .	14
2.1.3	Die Ermittlung der effizienten Menge . . . . .	23
2.2	Risikoloses Leihen und Verleihen . . . . .	25
2.2.1	Die risikolose Anlageform $A_f$ . . . . .	25
2.2.2	Risikoloses Leihen . . . . .	27
2.3	Ein Einfaktor-Marktmodell . . . . .	33
2.3.1	Ein Marktmodell . . . . .	33
2.3.2	Der EGP-Algorithmus . . . . .	37
2.4	Der Gleichgewichtszustand . . . . .	39
2.4.1	Das universelle Separationstheorem für vollkommene Kapitalmärkte	39
2.4.2	Das Marktportfolio und die Kapitalmarktlinie . . . . .	40
2.5	Risikobehaftete Wertpapiere und die Fundamentalgleichung des CAPM	42
2.5.1	Die Fundamentalgleichung und die Wertpapiermarktgerade . . . .	42
2.5.2	Anlagestrategien . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Arbitrage und elementare Derivatebewertung</b>	<b>49</b>
3.1	Arbitrage und Beinahe-Arbitrage . . . . .	49
3.1.1	Arbitrageportfolios . . . . .	49
3.1.2	Beinahe-Arbitrage und die Arbitrage-Preistheorie . . . . .	52
3.2	Elementare Derivate . . . . .	57
3.2.1	Termingeschäfte . . . . .	58
	Grundbegriffe . . . . .	58
	Marktteilnehmer . . . . .	60
	Kreditrisiken aus Derivaten . . . . .	62
3.2.2	Futures . . . . .	63
	Grundlegendes . . . . .	63
	Clearingstellen und Market-Maker . . . . .	65
	Margins . . . . .	66
3.3	Arbitragefreie Terminpreise . . . . .	69
3.3.1	Einige finanzmathematische Begriffe und Systemvoraussetzungen .	69
	Zinsen, insbesondere stetige Verzinsung . . . . .	69
	Der Barwert einer Zahlungsreihe . . . . .	71
	Leerverkauf und Wertpapierleihe . . . . .	72
	Systemvoraussetzungen und Standardbezeichnungen . . . . .	73
3.3.2	Forwardpreise . . . . .	74
3.3.3	Bewertung von laufenden Termingeschäften . . . . .	78

3.3.4	Futurepreis = Forwardpreis . . . . .	79
3.3.5	Spezielle Terminkontrakte . . . . .	81
	Futures auf Aktienindizes . . . . .	81
	Devisentermingeschäfte . . . . .	82
	Zinstermingeschäfte . . . . .	83
3.3.6	Aspekte von Warentermingeschäften . . . . .	83
	Cost-Of-Carry . . . . .	84
3.3.7	Forwardpreis vs. Erwartungswert des zukünftigen Preises . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Optionen</b> . . . . .	<b>86</b>
4.1	Grundlegendes zu Optionen . . . . .	86
4.2	Eigenschaften von Optionspreisen . . . . .	90
4.2.1	Grundsätzliche Annahmen und Notationen . . . . .	90
4.2.2	Faktoren, die den Optionspreis beeinflussen . . . . .	91
4.2.3	Schranken für Optionspreise . . . . .	94
4.2.4	Optimaler Ausübungszeitpunkt und Preisgrenzen bei amerikani- schen Optionen . . . . .	96
4.2.5	Put-Call-Parität . . . . .	100
4.3	Optionsstrategien . . . . .	103
4.3.1	Strategien mit einer Option und dem Underlying . . . . .	103
4.3.2	Spreads . . . . .	105
	Bull-Spread . . . . .	105
	Bear-Spread . . . . .	106
	Butterfly-Spread . . . . .	107
	Time-Spread . . . . .	107
	Weitere Spreads . . . . .	108
4.3.3	Kombinationen . . . . .	109
	Straddle . . . . .	109
	Strangle . . . . .	111
4.4	Fazit und Ausblick . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Endliche arbitragefreie Systeme</b> . . . . .	<b>114</b>
5.1	Arbitragefreie Einperiodensysteme . . . . .	115
5.1.1	Das Einperioden-Binomialmodell . . . . .	116
5.1.2	Allgemeine Einperiodensysteme . . . . .	121
5.2	Ein einfaches Mehrperiodensystem . . . . .	128
5.3	Arbitragefreie Mehrperiodensysteme . . . . .	132
5.3.1	Der Systemrahmen . . . . .	132
5.3.2	Selbstfinanzierende Handelsstrategien . . . . .	134
5.3.3	Charakterisierung arbitragefreier Systeme . . . . .	135
5.4	Vollständige arbitragefreie Mehrperiodensysteme . . . . .	140
5.4.1	Vollständigkeit . . . . .	140
5.4.2	Binomialmodelle . . . . .	143
5.5	Mathematische Gestaltungsmöglichkeiten . . . . .	143
5.5.1	Die zugehörige Baumdarstellung . . . . .	143
5.5.2	Numeraire und Diskontierung . . . . .	145
	Numerairewechsel . . . . .	149

<b>6</b>	<b>Binomialmodelle</b>	<b>151</b>
6.1	Die Bewertung europäischer Optionen mit Binomialbäumen . . . . .	151
6.1.1	Bewertung in Einperiodenmodellen . . . . .	151
6.1.2	Bewertung in Mehrperiodenmodellen . . . . .	155
6.2	Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell . . . . .	161
6.2.1	Einführung . . . . .	161
6.2.2	Bewertungsformeln . . . . .	163
6.2.3	Zur Praxistauglichkeit der Baummodelle . . . . .	165
6.2.4	Grenzwertbetrachtungen zum CRR-Modell . . . . .	169
6.2.5	Beweis der Sätze 137 und 140 . . . . .	174
6.2.6	Die Black-Scholes-Formel . . . . .	176
<b>7</b>	<b>Das Black-Scholes-Modell</b>	<b>181</b>
7.1	Ein Modell für den Kursverlauf einer Aktie . . . . .	182
7.1.1	Anforderungen . . . . .	182
7.1.2	Der Wiener-Prozess und verwandte stochastische Prozesse . . . . .	185
7.1.3	Die Itô-Formel . . . . .	189
7.1.4	Schätzwerte der Parameter . . . . .	195
7.2	Derivatebewertung . . . . .	198
7.2.1	Die Black-Scholes-Differentialgleichung und die risikoneutrale Bewertung . . . . .	198
7.2.2	Die Black-Scholes-Formel . . . . .	203
	Grenzwerte . . . . .	205
	Abhängigkeit von der Volatilität . . . . .	207
	Die implizite Volatilität . . . . .	208
7.2.3	Vorgehensweise bei Dividenden . . . . .	210
7.3	Hedging und die griechischen Buchstaben . . . . .	211
7.3.1	Gedeckter und ungedeckter Call, Stop-Loss-Strategie . . . . .	212
7.3.2	Delta-Hedging . . . . .	214
7.3.3	Weitere griechische Buchstaben . . . . .	220
	Gamma . . . . .	220
	Theta . . . . .	222
	Beziehung zwischen $\Delta$ , $\Gamma$ und $\Theta$ . . . . .	224
	Lambda (Vega) und Rho . . . . .	225
<b>8</b>	<b>Amerikanische Optionen</b>	<b>228</b>
8.1	Bewertung in Binomialmodellen . . . . .	228
8.2	Der Zuschlag für das Recht der vorzeitigen Ausübung . . . . .	236
8.3	Amerikanische Puts im Black-Scholes-Modell . . . . .	242
8.4	Berücksichtigung von Dividenden . . . . .	244
<b>9</b>	<b>Das allgemeine Bewertungsprinzip</b>	<b>249</b>
9.1	Die risikoneutrale Welt und das äquivalente Martingalmaß . . . . .	249
9.2	Der Marktpreis des Risikos . . . . .	252
9.3	Währungsderivate . . . . .	253
9.4	Die Sicht des US-Investors - Numerairewechsel . . . . .	255
9.5	Quantos . . . . .	257

<b>10 Zinsderivate</b>	<b>263</b>
10.1 Die Zinsstruktur	263
10.1.1 Zerobonds	264
10.1.2 Forwardraten	265
10.2 Einige gebräuchliche Zinsderivate	267
10.2.1 Termingeschäfte	267
OTC-Zinsderivate	267
Zins-Futures	270
10.2.2 Optionsgeschäfte	274
10.2.3 Exotische Varianten	275
10.3 Die Bewertung von Zinsoptionen mit dem Black-Scholes-Modell	275
10.3.1 Optionen auf Zerobonds	275
10.3.2 Zinsoptionen	279
10.4 Diskrete Zinsmodelle	281
10.5 Stetige Modelle für den kurzfristigen Zinssatz	287
10.5.1 Das Modell von Ho und Lee	288
10.5.2 Das Modell von Vasicek / Hull und White	289
10.5.3 Das Modell von Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	291
10.5.4 Das Modell von Black-Karasinski	292
10.5.5 Fazit	292
10.6 Das Heath-Jarrow-Morton-Modell (HJM)	293
10.6.1 Einfaktor-Modelle	294
10.6.2 Mehrfaktor-HJM-Modelle	297
Ein zweidimensionales HJM-Modell	298
Das LIBOR-Markt-Modell (BGM-Modell)	299
<b>11 Exotische Optionen und strukturierte Produkte</b>	<b>302</b>
11.1 Pfadunabhängige univariate exotische Optionen	303
11.1.1 Digitals	303
11.1.2 Power-Optionen	306
11.1.3 Compound-Optionen	308
11.1.4 Chooser-Optionen	310
11.2 Pfadabhängige exotische Optionen	311
11.2.1 Barrier-Optionen	311
Single-Barrier-Optionen	312
Double Barriers	318
Digitale Barrier-Optionen	319
11.2.2 Asiatische Optionen	321
Average-Price-Optionen	321
Average-Strike-Optionen	322
11.2.3 Lookback-Optionen	323
Floating-Strike-Lookbacks	324
Floating-Rate-Lookbacks	325
11.3 Multivariate Optionen	327
11.3.1 Bewertungsansatz im Black-Scholes-Modell	327
11.3.2 Tauschoptionen	330
11.3.3 Weitere multivariate Optionen	333

11.4	Strukturierte Produkte . . . . .	335
11.4.1	DAX-Garantiefonds . . . . .	336
11.4.2	Aktienanleihen . . . . .	338
	Doppel-Aktienanleihen . . . . .	341
	Aktienanleihen mit Mindestrückzahlung . . . . .	341
	Aktienanleihen mit Deaktivierungsschwelle . . . . .	342
	Aktienanleihen mit Aktivierungsschwelle . . . . .	342
	Diskont-Varianten . . . . .	342
11.4.3	Gap-Optionen . . . . .	343
<b>12</b>	<b>Die mathematische Theorie stochastischer Finanzmarktprozesse</b>	<b>346</b>
12.1	Einige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	347
12.1.1	Das Axiomensystem von Kolmogorov, Filtrationen und äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße . . . . .	347
12.1.2	Zufallsvariablen . . . . .	356
12.1.3	Folgen und Konvergenz . . . . .	357
12.1.4	Integration von Zufallsvariablen . . . . .	358
12.1.5	Der bedingte Erwartungswert . . . . .	361
12.1.6	Unabhängigkeit . . . . .	366
12.2	Stochastische Prozesse . . . . .	367
12.2.1	Grundlegendes . . . . .	367
12.2.2	Eigenschaften zeitstetiger Prozesse . . . . .	370
12.2.3	Martingale und Stoppzeiten . . . . .	372
12.2.4	Brownsche Bewegungen . . . . .	377
12.3	Stochastische Integration . . . . .	381
12.3.1	Einführende Diskussion . . . . .	381
12.3.2	Das Lebesgue-Stieltjes-Integral für stochastische Prozesse . . . . .	383
12.3.3	Das Itô-Integral . . . . .	387
12.3.4	Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	394
12.3.5	Die quadratische Variation . . . . .	396
12.3.6	Die Itô-Formel . . . . .	398
12.4	Arbitragefreiheit und Vollständigkeit . . . . .	404
12.4.1	Die Brownsche Filtration und der Martingal-Darstellungssatz . . . . .	404
12.4.2	Der Satz von Girsanov und das äquivalente Martingalmaß . . . . .	406
12.4.3	Handelsstrategien und Arbitragefreiheit . . . . .	411
12.4.4	Optionsbewertung und Vollständigkeit . . . . .	414
12.4.5	Mehrfaktormodelle . . . . .	418
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>422</b>
	<b>Index</b>	<b>426</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Der Südostbereich einer Anlageform . . . . .	9
2.2	Einfluss der Risikopräferenz auf die Investitionsentscheidung . . . . .	12
2.3	Indifferenzlinien eines risikoneutralen Investors . . . . .	13
2.4	Die zulässige und die effiziente Menge bei beliebig kombinierbaren risikohaften Anlageformen . . . . .	18
2.5	Ermittlung des optimalen Portfolios eines Investors . . . . .	23
2.6	Gestalt der effizienten Menge bei Vorhandensein einer risikolosen Anlageform . . . . .	28
2.7	Die effiziente Menge bei risikolosem Leihen und Verleihen . . . . .	30
2.8	Die effiziente Menge bei ungleichen Soll- und Habenzinsen . . . . .	32
2.9	Zusammenhang zwischen der Rendite der Anlageform $A_i$ und der Indexrendite . . . . .	33
2.10	Die Kapitalmarktklinie oder charakteristische Marktgerade . . . . .	41
2.11	Die charakteristische Wertpapiermarktgerade . . . . .	46
3.1	Funktionsweise einer Clearingstelle . . . . .	65
4.1	Payoff und P&L-Profil eines Calls . . . . .	88
4.2	Payoff und P&L-Profil eines Puts . . . . .	89
4.3	Preisgrenze für einen Call . . . . .	95
4.4	Preisgrenzen für einen europäischen Put . . . . .	97
4.5	Preisgrenzen für einen amerikanischen Put . . . . .	99
4.6	P&L-Diagramm Aktie (long) und Option . . . . .	104
4.7	P&L-Diagramm Aktie (short) und Option . . . . .	104
4.8	P&L-Profil eines Bull-Spreads (Aufbau über 2 Calls) . . . . .	106
4.9	P&L-Profil eines Bear-Spreads . . . . .	107
4.10	P&L-Diagramm eines Long-Butterfly-Spreads . . . . .	108
4.11	Condor und Call-Ratio-Spread . . . . .	108
4.12	P&L-Profil eines Straddles . . . . .	110
4.13	P&L-Profil eines Strangles . . . . .	112
5.1	Ein arbitragefreies Dreiperiodensystem mit zwei Anlageformen und stochastischer risikoloser Rendite . . . . .	138
6.1	Kalkulierter und tatsächlicher Kursverlauf . . . . .	168
6.2	CRR-Modelle mit $n = 1, 2$ und $3$ zu vorgegebenen Werten $\mu$ und $\sigma$ . . . . .	171
7.1	Pfad einer Brownschen Bewegung . . . . .	186
7.2	Pfad einer verallgemeinerten Brownschen Bewegung $dX = a \cdot dt + b \cdot dW$ . . . . .	187
7.3	Möglicher Kursverlauf einer Aktie . . . . .	188
7.4	Kursverlauf einer Aktie und erwartete mittlere Werte . . . . .	194
7.5	Black-Scholes-Preise und zugehörige Zeitwerte in Abhängigkeit von $S/K$ . . . . .	206
7.6	Lokale Approximation einer Funktion durch eine Tangente . . . . .	215

7.7	Das Delta eines europäischen Calls . . . . .	217
7.8	Der Theta-Wert europäischer Calls und Puts in Abhängigkeit von $S/K$ . . . . .	223
7.9	Theta in Relation zum Black-Scholes-Preis . . . . .	224
7.10	Zeitliche Entwicklung des Zeitwerts europäischer Call- und Put-Optionen . . . . .	224
7.11	Gamma und Vega . . . . .	226
8.1	Typische Lage des Bereichs mit vorteilhafter sofortiger Ausübung bei einem amerikanischen Put . . . . .	241
10.1	Zinsstrukturkurven . . . . .	264
10.2	Ertrag aus FRA-Verkauf und Verkauf des exakten Future-Hedge . . . . .	273
10.3	Pull-to-Par von Zerobondpreisen . . . . .	277
10.4	Ein Trinomialmodell für den risikoneutralen Prozess des kurzfristigen Zinssatzes . . . . .	285
10.5	Abgeleitete Bondpreise . . . . .	286
11.1	Long-Position eines Digital-Calls bzw. Digital-Puts . . . . .	304
11.2	Payoff von Power-Optionen . . . . .	307
11.3	Down-and-In-Put ohne Rebate . . . . .	314
11.4	Up-and-Out-Call mit Rebate at hit bzw. at expiry . . . . .	314
11.5	Payoff von Lookback-Optionen des Floating-Strike-Typs . . . . .	325
11.6	Payoffs von Lookforward-Optionen . . . . .	326
11.7	Rendite einer Aktienanleihe im Vergleich zu Anlagealternativen . . . . .	339
11.8	Payoff-Profil eines Gap-Calls . . . . .	344
11.9	P&L-Profile von Gap-Calls . . . . .	345
12.1	Zu einem Ereignis gehörende Elementarereignisse . . . . .	351
12.2	Atomare Mengen einer aufsteigenden Folge von $\sigma$ -Algebren (=Filtration) . . . . .	352
12.3	Zwei äquivalente diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	355
12.4	Definitionsbereiche der Pfade und Zufallsvariablen eines stochastischen Prozesses . . . . .	368
12.5	Pfad eines zeitstetigen Prozesses . . . . .	369
12.6	Originalprozess und gestoppter Prozess . . . . .	375
12.7	Veränderte Erwartungswerte eines Martingals im Lauf der Zeit . . . . .	377
12.8	Eine messbare Menge stetiger Funktionen . . . . .	379
12.9	Beispiel einer Funktion mit unendlicher Variation . . . . .	385
12.10	Eine linksseitig stetige Treppenfunktion mit Sprungstellen $t_1, \dots, t_4$ . . . . .	388