

## Inhaltsverzeichnis\*

### TEIL III DIDAKTIK DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE UND LINEAREN ALGEBRA

1	BEZIEHUNGSNETZE, FUNDAMENTALE IDEEN UND HISTORISCHE ENTWICKLUNG DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE UND LINEAREN ALGEBRA .....	2
1.1	Leitideen und fachwissenschaftlicher Hintergrund .....	3
1.1.1	Leitideen der Linearen Algebra: Überblick .....	3
	<i>Matrizen</i> .....	6
	<i>Eigenwerte und Eigenvektoren</i> .....	7
1.1.2	Vektorraum und Punktraum .....	9
	<i>Exkurs 1: Begründung der Linearen Algebra aus der Geometrie</i> .....	11
	<i>Exkurs 2: Der Punktraum als Vektorraum – Identifizierung von Punkt und Vektor</i> .....	13
1.1.3	Symmetrische Bilinearformen, Quadriken und deren Klassifikation .....	15
	<i>Kegelschnitte</i> .....	16
	<i>Flächen 2. Ordnung</i> .....	20
1.1.4	Lineare und affine Abbildungen und deren Klassifikation .....	22
	<i>Die affinen Abbildungen der Ebene</i> .....	24
	<i>Die affinen Abbildungen des Raumes</i> .....	25
	<i>Die orthogonalen Abbildungen und Isometrien</i> .....	26
1.1.5	Determinantenform und Determinante .....	28
1.1.6	Metrische Räume .....	30
1.1.7	Lineare Gleichungssysteme und der Gaußsche Algorithmus .....	33
1.1.8	Zusammenfassung: Leitideen .....	36
	<i>Schema 1.1 Leitideen der Linearen Algebra</i> .....	37
	Aufgaben, Wiederholung, wichtige Begriffe und Zusammenhänge .....	37
1.2	Zentrale Mathematisierungsmuster und bereichsspezifische Strategien .....	40
1.2.1	Zentrale Mathematisierungsmuster .....	40
	<i>Aspekte des mathematischen Modellierens im Mathematikunterricht</i> .....	41
1.2.1.1	Beschreibung physikalischer und technischer Phänomene mit Hilfe von Vektoren und Kurven .....	42
1.2.1.2	Entscheidungs- und Optimierungsprobleme in den Wirtschaftswissenschaften (Verflechtungs-, lineare Optimierungs- und Transportprobleme) .....	45
1.2.1.3	Beschreibung von Prozessen in den Sozial-, Wirtschafts- und Naturwissenschaften (Markoff-Prozesse, Probleme der Populationsdynamik) .....	50
1.2.1.4	Klärung von Zusammenhängen zwischen Merkmalsvariablen/Meißgrößen (regressions-, korrelations- und faktorenanalytische Fragestellungen) .....	53
1.2.1.5	Lineare Gleichungssysteme als zentrales Mathematisierungsmuster .....	57
	<i>Schema 1.2 Zusammenfassung: Zentrale Mathematisierungsmuster</i> .....	58
1.2.2	Bereichsspezifische Strategien und Problemkontexte .....	59
	<i>Schema 1.3 Bereichsspezifische Strategien</i> .....	60
1.2.2.1	Geometrisieren algebraischer Sachverhalte und Algebraisieren geometrischer Sachverhalte .....	60
1.2.2.2	Zur Analogie zwischen ebenen und räumlichen Sachverhalten sowie zwischen $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ .....	62

\* Die Abschnitte 1.4 & 2.3 wurden von G. Wittmann, 4.3 von P. Schroth und U.-P. Tietze verfaßt. Die Numerierung von Bildern, Schemata und Fußnoten bezieht sich auf die Kapitel (oberste Gliederungsebene). Die Numerierung von Beispielen und Aufgaben erfolgt auf der Ebene der Hauptabschnitte (zweite Ebene, etwa Beispiel 2 in 2.3).

1.2.2.3	Linearitätsüberlegungen, die Darstellung und Behandlung elementar-algebraischer Sachverhalte im Matrizenkalkül sowie das Transformieren von Koordinaten.....	63
1.2.2.4	Strategie des Gaußschen Algorithmus .....	63
1.2.2.5	Mathematisches Experimentieren mit konkreten Modellen und dem Rechner .....	65
	Aufgaben, Wiederholung .....	67
1.3	Zusammenfassung: Fundamentale Ideen für den Unterricht in Analytischer Geometrie und Linearer Algebra .....	69
	<i>Schema 1.4 Zusammenfassung: Fundamentale Ideen zur Analytischen Geometrie und Linearen Algebra im Umfeld der Schulmathematik.....</i>	71
	Aufgaben .....	72
1.4	Historische Entwicklung (von G. Wittmann) .....	73
	<i>Entwicklung der klassischen Analytischen Geometrie .....</i>	73
	<i>Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizen.....</i>	75
	<i>Die Entwicklung früher geometrischer Kalküle: Leibniz, Möbius, Bellavitis .....</i>	77
	<i>Von den komplexen Zahlen zu Hamiltons Quaternionenkalkül .....</i>	80
	<i>Entwicklung der Vektoranalysis aus dem Quaternionenkalkül.....</i>	83
	<i>Ursprünge der Vektorraumtheorie bei Grassmann.....</i>	84
	<i>Erste Axiomatisierungen der Vektorraumstruktur durch Peano und Weyl.....</i>	86
	<i>Etablierung des axiomatischen Vektorraumbegriffs durch die Funktionalanalysis.....</i>	87
	<i>Beiträge der Körpertheorie zur Entwicklung der Linearen Algebra.....</i>	90
	<i>Entwicklung der Linearen Algebra im 20. Jahrhundert.....</i>	91
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion .....	92
2	ALLGEMEINE DIDAKTISCHE FRAGEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE UND LINEAREN ALGEBRA .....	93
2.1	Fachdidaktische Entwicklungen und Strömungen .....	93
2.1.1	Die Analytische Geometrie in der Traditionellen Mathematik .....	94
2.1.1.1	Koordinatengeometrie und die Lehre von den Kegelschnitten .....	94
2.1.1.2	Vektorielle Analytische Geometrie.....	98
	<i>Aufgabeninseln und Routineaufgaben .....</i>	100
	<i>Lineare Gleichungssysteme und Determinanten in älteren Schulbüchern.....</i>	101
2.1.2	Die Lineare Algebra der Neuen Mathematik .....	102
2.1.3	Die anwendungsorientierte Lineare Algebra.....	105
	<i>Exkurs: Matrizen und Motivation .....</i>	107
	<i>Grenzen außermathematischer Motivierung.....</i>	108
2.1.4	Die didaktische und schulpraktische Auseinandersetzung mit der Linearen Algebra.....	108
2.1.4.1	Eine Auseinandersetzung mit den Begründungsargumenten der Linearen Algebra in der Neuen Mathematik.....	108
	<i>Exkurs: Abstrahierende oder charakterisierende Axiomatik – ein schulrelevanter Gegensatz? .....</i>	110
2.1.4.2	Schulpraktische Konsequenzen: eine Lehrplanänderung von 1983 .....	112
2.1.4.3	$n$ -Tupel und ihre geometrische Interpretation .....	114
2.1.4.4	Art und Umfang geometrischer Fragestellungen .....	115
2.1.4.5	Zurück zur vektoriellen Analytischen Geometrie? - Ein Vergleich neuerer Schulbücher. 118	
2.1.5	Problemorientierung, Rechner und experimenteller Unterricht, gebietsübergreifende Ansätze .....	121
2.1.5.1	Der Rechner und mathematisches Experimentieren.....	121
2.1.5.2	Zurück zu den Kegelschnitten? .....	123
2.1.5.3	Problemorientierung, Objektstudien und experimentelles Arbeiten .....	123
2.1.5.4	Gebietsübergreifende Ansätze.....	124

Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	125
2.2 Das Curriculum aus Sicht des Lehrers.....	127
2.2.1 Schulbücher im Urteil der Lehrer.....	128
2.2.2 Interviews.....	130
2.3 Schülerkonzepte und epistemologische Probleme (von G. Wittmann).....	132
2.3.1 Vektorbegriff.....	134
<i>Vektor als Pfeilklassse bzw. Verschiebung</i> .....	134
<i>Vektor als n-Tupel reeller Zahlen</i> .....	137
2.3.2 Parametergleichung einer Gerade.....	140
2.3.3 Aufgaben in der Analytischen Geometrie.....	142
2.3.4 Vektorraum als Strukturbegriff.....	145
Aufgaben.....	148
2.4 Zur Rechtfertigung und Realisierung eines veränderten Unterrichts in Analytischer Geometrie und Linearer Algebra.....	149
2.4.1 Neue Formen des Unterrichts, Veränderungen in der Unterrichtskultur und in den Zielen.....	149
2.4.2 Offene Probleme und das „Öffnen“ von Schulbuchaufgaben.....	152
2.4.3 Sprache und Verstehen.....	153
2.4.4 Rechnereinsatz.....	153
2.4.5 Inhalte.....	154
<i>Grund- und Leistungskurs</i> .....	156
<i>Perspektiven</i> .....	158
Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	158
3 DIDAKTISCHE BEHANDLUNG VON EINZELTHEMEN.....	159
3.1 Punkte, Geraden, Ebenen sowie Vektoren und lineare Gleichungssysteme.....	159
3.1.1 Vektoren und Punkte.....	159
<i>Schema 3.1 Schulrelevante Interpretationen des Vektorbegriffs</i> .....	160
3.1.2 Geraden, Ebenen und lineare Gleichungssysteme.....	166
<i>Geraden und Ebenen in der Koordinatengeometrie</i> .....	170
<i>Lineare Gleichungssysteme und lineare mathematische Modelle</i> .....	171
3.1.3 Konvexe Mengen, lineares Optimieren.....	173
<i>Lineares Optimieren</i> .....	176
3.1.4 Exkurse zur Vertiefung des theoretischen Aspekts von Mathematik.....	177
<i>Problemorientierte Entdeckung der Vektorraumstruktur</i> .....	177
<i>Exaktifizierungen und Erweiterungen</i> .....	180
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	182
3.2 Länge, Abstand, Winkelmaß und Skalarprodukt.....	185
3.2.1 Zur Einführung des Skalarprodukts.....	185
<i>Didaktische Überlegungen</i> .....	187
<i>Innermathematische Anwendungen des Skalarprodukts</i> .....	188
3.2.2 Fachliche Erweiterungen und Vertiefungen.....	191
<i>Vektorprodukt und Spatprodukt</i> .....	191
<i>Exkurs: Allgemeine Fragen der Längen- und Abstandsmessung</i> .....	192
<i>Drei Exkurse zum theoretischen Aspekt von Mathematik</i> .....	194
3.2.3 Die Korrelation als Skalarprodukt und andere Anwendungen.....	195
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	196
3.3 Abbildungen, Matrizen und Determinanten.....	199
3.3.1 Lineare und affine Abbildungen.....	199
<i>Unterschiedliche didaktische Ansätze</i> .....	199

	<i>Projektionen</i> .....	202
	<i>Objekt- und Computerstudien</i> .....	205
	<i>Didaktische Wertung und Einordnung</i> .....	206
3.3.2	Matrizen und lineare mathematische Modelle.....	208
	<i>Lineare mathematische Modelle</i> .....	209
3.3.3	Determinanten.....	211
	<i>Schema 3.2 Analogien bei Determinanten</i> .....	213
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	214
3.4	Exemplarische Curriculumelemente.....	215
	<i>Schema 3.3 Exemplarische Curriculumelemente</i> .....	216
4	<b>BEISPIELE FÜR EINEN PROBLEM- UND ANWENDUNGSORIENTIERTEN UNTERRICHT: KURVEN UND FLÄCHEN</b> .....	218
	<i>Lehrverfahren eines problemorientierten Unterrichts</i> .....	219
	<i>Merkmale eines experimentellen Unterrichts</i> .....	220
	<i>Eine übergreifende Idee für den Geometrieunterricht: der geometrische Ort</i> .....	221
	<i>Schema 4.1 Geometrische Örter</i> .....	221
	<i>Einführung zum Thema Kurven</i> .....	222
4.1	Kegelschnitte als spezielle Kurven.....	224
4.1.1	Die Kegelschnitte als Gegenstand der ebenen Geometrie.....	225
	<i>Ellipse</i> .....	227
	<i>Hyperbel</i> .....	228
	<i>Parabel</i> .....	230
	<i>Tangente, Normale und Polare</i> .....	230
4.1.2	Kegelschnitte als Gegenstand der räumlichen Geometrie – ein Exkurs.....	232
	<i>Kegelschnitt als projektives Bild eines Kreises</i> .....	234
	<i>Kegelschnitt als Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene, algebraisch betrachtet</i> .....	234
4.1.3	Kegelschnitte in Alltag und Anwendung.....	235
4.1.4	Didaktische Wertung und Einordnung.....	237
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	237
4.2	Allgemeine Kurven in der Ebene und im Raum.....	239
	<i>Kurven in kartesischen Koordinaten</i> .....	239
	<i>Zum Kurvenbegriff</i> .....	241
	<i>Kurven in Polarkoordinaten</i> .....	241
4.2.1	Betrachtung der Eigenschaften von Kurven.....	242
	<i>Die dynamische Sichtweise von Kurven</i> .....	243
	<i>Richtung, Bogenlänge und Krümmung</i> .....	244
	<i>Ausblick auf die Behandlung räumlicher Kurven</i> .....	250
4.2.2	Objektstudien zum Kreis.....	251
4.2.3	Objektstudien zu Spiralen.....	253
4.2.4	Generierung von Kurven.....	256
4.2.5	Didaktische Einordnung und Bewertung.....	257
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	259
4.3	Flächen und Funktionen mehrerer Veränderlicher (von P. Schroth und U.-P. Tietze).....	261
4.3.1	Flächen zweiter Ordnung.....	262
4.3.2	Funktionen zweier Veränderlicher.....	266
4.3.3	Exkurs: Regelflächen.....	271
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	276
	<i>Literaturverzeichnis</i> .....	278
	<i>Stichwortverzeichnis</i> .....	287