

## Inhaltverzeichnis

### Teil III Didaktik der Stochastik

<b>1 Fachlicher Hintergrund und historische Entwicklung</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Fachlicher Hintergrund</b>	<b>1</b>
1.1.1 Wahrscheinlichkeitsraum	1
1.1.1.1 Ereignisalgebra	2
1.1.1.2 Wahrscheinlichkeitsmaß	3
1.1.1.3 Verknüpfungen von Wahrscheinlichkeiten	6
1.1.1.3.1 Additionssätze	6
1.1.1.3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit	7
1.1.1.3.3 Multiplikationssatz	9
1.1.1.3.4 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	10
1.1.1.3.5 Unabhängigkeit	10
1.1.1.3.6 <i>Bayes</i> -Regel	12
1.1.1.3.7 Produkträume	14
1.1.2 Zufallsvariable, Verteilungen, Momente	15
1.1.2.1 Zufallsvariablen, Verteilungen	15
1.1.2.1.1 Diskrete Verteilungen	15
1.1.2.1.2 Stetige Verteilungen	16
1.1.2.2 Erwartungswert, Varianz (Standardabweichung)	17
1.1.2.2.1 Erwartungswert	17
1.1.2.2.2 Varianz, Standardabweichung	19
1.1.3 Spezielle Verteilungen	20
1.1.3.1 Gleichverteilung	20
1.1.3.2 Binomialverteilung	20
1.1.3.3 Geometrische Verteilung	22
1.1.3.4 Hypergeometrische Verteilung	23
1.1.3.5 <i>Poisson</i> -Verteilung	24
1.1.3.6 Normalverteilung	25
1.1.3.7 Exponentialverteilung	26
1.1.4 Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze	27
1.1.4.1 Ungleichung von <i>Tschebyscheff</i>	27
1.1.4.2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen	28
1.1.4.3 Grenzwertsätze von <i>de Moivre</i> und <i>Laplace</i>	29
1.1.4.4 Zentraler Grenzwertsatz	30
1.1.4.5 Überblick über die möglichen Approximationen	31
<b>1.2 Modellbildung in der Statistik</b>	<b>32</b>
1.2.1 Datenerfassung und -strukturierung	32
1.2.2 Beschreibende Statistik	32

---

1.2.2.1 Datenerfassung	32
1.2.2.1.1 Statistische Einheiten, Massen, Merkmale	32
1.2.2.1.2 Datenerhebung	33
1.2.2.1.3 Häufigkeitsverteilung	34
1.2.2.1.4 Visualisierungen	34
1.2.2.2 Lageparameter, Streuungsparameter	35
1.2.2.2.1 Lageparameter	35
Arithmetisches Mittel	35
Median (Zentralwert)	36
Weitere Lageparameter	37
1.2.2.2.2 Streuungsparameter	37
Empirische Standardabweichung, Varianz	38
Spannweite	39
Quartilsabstand	39
1.2.2.3 Korrelation, Regression	39
1.2.2.3.1 Korrelation	41
1.2.2.3.2 Regression	43
1.2.3 Explorative Datenanalyse ( <i>EDA</i> )	44
1.2.3.1 Stamm-Blatt-Diagramm	45
1.2.3.2 Box-Plot	46
1.2.3.3 Streudiagramm	46
1.2.3.4 Datentransformationen	47
1.2.3.5 Verfahren der Modellierung in der <i>EDA</i>	48
1.2.4 Konkrete Modelle	48
1.2.4.1 Binomialverteilung und hypergeometrische Verteilung	48
1.2.4.1.1 Modellierung einer <i>Bernoullikette</i>	48
1.2.4.1.2 Modellierung einer Irrfahrt	50
1.2.4.1.3 Modellierung am umgekehrten Wahrscheinlichkeitsbaum	51
1.2.4.1.4 Grundaufgaben zu Bernoulliketten	51
1. Grundaufgabe: Warten auf den ersten Erfolg	51
2. Grundaufgabe: Wenigstens ein Erfolg	52
3. Grundaufgabe: Genau $n$ Erfolge	52
1.2.4.1.5 Eigenschaften der Binomialverteilung	52
Erwartungswert	52
Varianz, Standardabweichung	53
Weitere Eigenschaften	53
1.2.4.1.6 Binomialverteilung – hypergeometrische Verteilung	54
1.2.4.2 Normalverteilung	55
1.2.4.2.1 Zentraler Grenzwertsatz	55
1.2.4.2.2 Grenzwertsätze von <i>Moivre-Laplace</i>	57
1.2.5. Auswertung und Überprüfung	58
1.2.5.1 Vorbemerkungen	58

1.2.5.2 Problemstellungen der beurteilenden Statistik	59
1.2.5.3 Stichprobenerhebung	60
1.2.5.4 Schätzen und Testen	62
1.2.5.5 Punktschätzung	63
1.2.5.5.1 Beurteilungskriterien für Schätzfunktionen	63
1.2.5.6 Intervallschätzung	64
1.2.5.7 Hypothesentest	65
1.2.5.7.1 Beschreibung des Testproblems, des A-priori-Modells	66
1.2.5.7.2 Wahl des Signifikanzniveaus	67
1.2.5.7.3 Testgröße, kritischer Bereich, Entscheidungsregel	69
1.2.5.7.4 Berechnung der OC-Funktion	70
1.2.5.7.5 Bestimmung des Testwertes, Entscheidung, Interpretation	72
1.2.5.7.6 Übersicht über wichtige klassische Testverfahren und Testtum	73
1.2.5.8 Verteilungsfreie Testverfahren	73
1.2.5.9 <i>Bayes</i> -Statistik	74
1.2.5.9.1 Testen von Hypothesen	74
1.2.5.9.2 Punktschätzung	75
1.2.5.9.3 Bereichsschätzung	76
1.2.5.9.4 Prädikativverteilungen	76
<b>1.3 Zur Geschichte der Stochastik</b>	<b>77</b>
1.3.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung	77
1.3.1.1 <i>Laplacescher</i> und geometrischer Wahrscheinlichkeitsbegriff	79
1.3.1.2 Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff	82
1.3.1.3 Subjektivistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff	86
1.3.1.4 Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff	87
1.3.2 Statistik	88
<b>1.4 Fundamentale Ideen einer Stochastik für den Unterricht</b>	<b>91</b>
1.4.1 Zum Konzept der fundamentalen Ideen in der Stochastik	91
1.4.2 Leitideen	92
1.4.3 Bereichsspezifische Strategien	94
1.4.4 Mathematisierungsmuster	96
<b>2 Allgemeine didaktische Fragen zum Stochastikunterricht</b>	<b>97</b>
<b>2.1 Geschichte des Stochastikunterrichts und fachdidaktische Strömungen</b>	<b>97</b>
2.1.1 Vorbemerkung	97
2.1.2 Zur Geschichte des Stochastikunterrichts	97
2.1.2.1 Stochastikunterricht vor und um 1900	97
2.1.2.2 Stochastikunterricht zwischen 1900 und 1933	98
2.1.2.3 Stochastikunterricht zwischen 1933 und 1945	99

2.1.2.4 Stochastikunterricht nach 1945	99
2.1.3 Konzepte für Stochastik-Curricula für die Sekundarstufe II	102
2.1.3.1 Klassischer Aufbau	103
2.1.3.2 Anwendungsorientierter Aufbau	105
2.1.3.3 <i>Bayes</i> -Statistik	106
2.1.3.4 Datenorientierte Statistik	108
2.1.3.5 Resumee	110
<b>2.2 Computereinsatz im Stochastikunterricht</b>	<b>113</b>
2.2.1 Allgemeine Gesichtspunkte	113
2.2.1.1 Reiz eines Gegenstandes	114
2.2.1.2 Entdeckendes, problemorientiertes Lernen	114
2.2.1.3 Selbsttätigkeit, experimentell-konstruktives Umgehen mit Mathematik	116
2.2.1.4 Realistische Anwendungen	118
2.2.2 Datenerfassung und -strukturierung	120
2.2.3 Modellbildung	124
2.2.3.1 Funktionen im Prozess der Modellbildung	124
2.2.3.2 Rechneinsatz in verschiedenen Bereichen	125
2.2.3.3 Zentraler Grenzwertsatz	127
2.2.3.4 <i>Markoff</i> -Ketten	128
2.2.4 Überprüfung	128
2.2.5 Simulation	129
2.2.6 Programme zur Stochastik	133
2.2.6.1 Professionelle Anwenderprogramme	133
2.2.6.2 Programmiersprachen	133
2.2.6.3 Mathematikprogramme	133
2.2.6.4 Tabellenkalkulationsprogramme	134
2.2.6.5 Programme, die für den Stochastikunterricht konzipiert sind	134
2.2.6.6 Internet	134
<b>2.3 Stochastisches Denken</b>	<b>135</b>
2.3.1 Zum Begriff des stochastischen Denkens	135
2.3.2 Schwierigkeiten bei der Entwicklung stochastischen Denkens, primäre und sekundäre stochastische Intuitionen	138
2.3.3 Theorien zum stochastischen Denken	141
2.3.3.1 Heuristik-Ansatz	142
2.3.3.1.1 Repräsentativitätsheuristik	142
2.3.3.1.2 Verfügbarkeitsheuristik	142
2.3.3.1.3 Heuristik des Verankerns und Anpassens	143
2.3.3.1.4 Kausalschema als Heuristik	143
2.3.3.1.5 Kritik am Heuristikkonzept	144
2.3.3.2 Der kognitive Ansatz	144
2.3.3.3 Folgerungen	145

---

2.3.4 Intuitionen und Strategien zu einzelnen Begriffen und Konzepten der Stochastik	145
2.3.4.1 Konzept des Zufalls	146
2.3.4.2 Wahrscheinlichkeiten als Bewertungen von zufälligen Ereignissen	152
2.3.4.3 Konjunktive und disjunktive Verknüpfungen von Wahrscheinlichkeiten	155
2.3.4.4 Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit	156
2.3.4.5 Verteilungen	165
2.3.4.6 Beurteilende Statistik	167
2.3.5 Folgerungen für den Stochastikunterricht	169
<b>3. Behandlung von Einzelthemen im Unterricht</b>	<b>172</b>
<b>3.1. Beschreibende Statistik und Explorative Datenanalyse im Unterricht</b>	<b>172</b>
3.1.1 Didaktische Positionen	172
3.1.2 Begründungen im Einzelnen	173
3.1.2.1 Anwendungsbezug	173
3.1.2.2 Modellbildungsprozess	175
3.1.2.3 Handlungsorientierung	177
3.1.2.4 Beschreibende Statistik – Wahrscheinlichkeitsrechnung	179
3.1.2.4.1 Relative Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit	180
3.1.2.4.2 Operationen mit relativen Häufigkeiten – mit Wahrscheinlichkeiten	180
3.1.2.4.3 Verteilungen von Zufallsvariablen	181
3.1.3 Regression, Korrelation	182
3.1.4 Explorative Datenanalyse	184
<b>3.2 Wahrscheinlichkeitsraum</b>	<b>186</b>
3.2.1 Didaktische Positionen	186
3.2.2 Grundraumfreie Behandlung der Stochastik	186
3.2.3 Zur Behandlung des Wahrscheinlichkeitsraums	187
3.2.3.1 Ereignisraum	188
3.2.3.2 Wahrscheinlichkeit als Maß	190
3.2.3.3 <i>Laplace</i> -Wahrscheinlichkeitsräume	192
<b>3.3 Elementare Kombinatorik</b>	<b>194</b>
3.3.1 Das Allgemeine Zählprinzip	195
3.3.2 Reihenfolgeprobleme	196
3.3.3 Auswahlprobleme	196
3.3.4 Übersicht	197
3.3.5 Folgerungen für den Stochastikunterricht	198
<b>3.4 Verteilungen von Zufallsvariablen</b>	<b>200</b>
3.4.1 Zufallsvariablen	200
3.4.1.1 Begriff der Zufallsvariable	200

3.4.1.2 Erwartungswert	201
3.4.1.3 Varianz, Standardabweichung	202
3.4.2 Behandlung der Binomialverteilung	202
3.4.3 Behandlung der <i>Poisson</i> -Verteilung	205
3.4.4 Behandlung der Normalverteilung	208
3.4.4.1 Falten von Verteilungen	208
3.4.4.2 Lokaler und globaler Grenzwertsatz von <i>Moivre-Laplace</i>	209
3.4.4.3 Normalverteilung als Modell einer Irrfahrt	209
<b>3.5 Beurteilende Statistik</b>	<b>210</b>
3.5.1 Das Maximum-Likelihood-Prinzip	210
3.5.2 Eigenschaften konkreter Schätzfunktionen	211
3.5.2.1 Das Stichprobenmittel	211
3.5.3 Spezielle Konfidenzintervalle	212
3.5.3.1 Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit $p$ einer Binomialverteilung	212
3.5.3.2 Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$	213
3.5.3.2 Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$	213
3.5.4 Die Länge von Konfidenzintervallen	214
3.5.5 Ein Parametertest	215
3.5.6 Ein verteilungsfreies Testverfahren – der Vorzeichentest	217
<b>3.6 Bayes-Statistik</b>	<b>219</b>
3.6.1 Vorbemerkung	219
3.6.2 Ein erstes Beispiel	219
3.6.3 Die Binomialverteilung als Versuchsverteilung	221
3.6.4 Andere Versuchsverteilungen	225
3.6.5 Didaktischer Kommentar	226
<b>3.7 Aufgaben im Stochastikunterricht</b>	<b>230</b>
3.7.1 Funktionen von Aufgaben	230
3.7.2 Formulierung von Aufgaben zu Begriffen und Methoden der Stochastik	231
3.7.3 Strategien zum Lösen von Aufgaben	236
<b>4 Beispiele zu einem problem- und anwendungsorientierten Stochastikunterricht</b>	<b>245</b>
<b>4.1 Sequentielle Statistik</b>	<b>245</b>
4.1.1 Grundlegende Idee	245
4.1.2 Motivation	245
4.1.3 Geeignete Wahl von $A$ und $B$	246
4.1.4 Der Test	247
4.1.5 Ein konkretes Beispiel	248

---

4.1.6 Ausblick und Resümee	250
<b>4.2 Markoff-Ketten</b>	<b>251</b>
4.2.1 Grundlegende Definitionen	251
4.2.2 Ein elementares Beispiel	251
4.2.3 Ein Grenzwertsatz	253
4.2.4 Schlussbemerkung und didaktischer Kommentar	258
<b>4.3 Vierfeldertafeln</b>	<b>260</b>
4.3.1 Aufbau	260
4.3.2 Vierfeldertafeln und Baumdiagramme	260
4.3.3 Ein Medikamententest	263
4.3.4 Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest	266
4.3.5 Ein exakter Test	268
4.3.6 Didaktischer Kommentar	269
<b>4.4 Das Problem der vertauschten Briefe</b>	<b>271</b>
4.4.1 Die Problemstellung	271
4.4.2 Die Lösung	271
4.4.3 Eine erste Verallgemeinerung	272
4.4.4 Ein anderes Problem	273
4.4.5 Eine zweite Verallgemeinerung	274
4.4.6 Noch ein anderes Problem	274
4.4.7 Eine letzte Verallgemeinerung	275
4.4.8 Didaktischer Kommentar	275
<b>4.5 Lotto</b>	<b>278</b>
4.5.1 Die Spielregeln	278
4.5.2 Probleme aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	279
4.5.2.1 Die Suche nach den Gewinnwahrscheinlichkeiten	279
4.5.2.2 Das Auftreten bestimmter Zahlen	280
4.5.2.3 Wie werden aus vier Richtigen sechs Richtige?	283
4.5.2.4 Mehrlingsprobleme	285
4.5.3 Probleme aus der Statistik	287
4.5.3.1 Einleitung	287
4.5.3.2 Prüfung auf Gleichwahrscheinlichkeit	287
Exkurs: Die Chi-Quadrat-Verteilung und ein Anpassungstest	289
4.5.3.3 Erstellen von Schätzbereichen	291
4.5.3.4 Parametertests und Konfidenzintervalle	291
4.5.4 Schlussbemerkung und didaktischer Kommentar	292
<b>4.6 Verteilungsfreie Testverfahren</b>	<b>294</b>
4.6.1 Vorbemerkung	294
4.6.2 Der Binomialtest	294
4.6.3 Der Iterationstest	295
4.6.4 Der Median-Test	296

4.6.5 Der Randomisierungstest	297
4.6.6 Ausblick und didaktisches Resümee	298
<b>Literatur</b>	<b>301</b>
<b>Index</b>	<b>311</b>