

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Pythagoräische Zahlentripel | 1 |
| 1.2 | Die Pellsche Gleichung | 3 |
| 1.3 | Die Fermatsche Vermutung | 3 |
| 1.4 | Kongruenzen | 7 |
| 1.5 | Public Key Cryptology | 10 |
| 1.6 | Quadratische Reste | 11 |
| 1.7 | Primzahlverteilung | 21 |
| 1.8 | Der Primzahlsatz | 26 |
| 2 | Die Geometrie der Zahlen | 33 |
| 2.1 | Binäre quadratische Formen | 33 |
| 2.2 | Vollständige zerlegbare Formen n -ten Grades | 34 |
| 2.3 | Moduln und Ordnungen | 37 |
| 2.4 | Vollständige Moduln in endlichen Erweiterungen von P | 40 |
| 2.5 | Die ganzen Zahlen quadratischer Zahlkörper | 42 |
| 2.6 | Weitere Beispiele für die Bestimmung einer \mathbb{Z} -Basis | 43 |
| 2.7 | Die Endlichkeit der Klassenzahl | 44 |
| 2.8 | Die Einheitengruppe | 45 |
| 2.9 | Ansatz zum Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes | 47 |
| 2.10 | Der Rang von $I(E)$ | 48 |
| 2.11 | Der Regulator einer Ordnung | 52 |
| 2.12 | Der Gitterpunktsatz | 52 |
| 2.13 | Die Minkowskische Geometrie der Zahlen | 53 |
| 2.14 | Anwendung auf vollständige zerlegbare Formen | 58 |
| 3 | Die Dedekindsche Idealtheorie | 62 |
| 3.1 | Grundlegende Definitionen | 63 |
| 3.2 | Der Hauptsatz der Dedekindschen Idealtheorie | 65 |
| 3.3 | Folgerungen aus dem Hauptsatz | 67 |
| 3.4 | Die Umkehrung des Hauptsatzes | 69 |
| 3.5 | Die Norm eines Ideals | 70 |
| 3.6 | Kongruenzen | 72 |
| 3.7 | Lokalisierung | 74 |
| 3.8 | Die Zerlegung eines Primideals in einer endlichen Erweiterung | 76 |
| 3.9 | Die Klassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers | 79 |
| 3.10 | Relative Erweiterungen | 83 |
| 3.11 | Geometrische Deutung | 87 |
| 3.12 | Differente und Diskriminante | 88 |
| 4 | Bewertungen | 97 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.1 | Bewertete Körper | 97 |
| 4.2 | Die Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen | 103 |
| 4.3 | Vervollständigung | 106 |
| 4.4 | Vollständige Körper bezüglich einer diskreten Bewertung | 107 |
| 4.5 | Fortsetzung einer Bewertung eines vollständigen Körpers | 113 |
| 4.6 | Endliche Erweiterungen eines vollständigen Körpers | 116 |
| 4.7 | Vollständige Körper mit endlichem Restklassenkörper | 121 |
| 4.8 | Fortsetzung der Bewertung eines beliebigen Körpers | 124 |
| 4.9 | Die Arithmetik im Kompositum zweier Erweiterungen | 128 |
| 5 | Algebraische Funktionen einer Unbestimmten | 131 |
| 5.1 | Algebraische Funktionenkörper | 132 |
| 5.2 | Die Stellen eines algebraischen Funktionenkörpers | 134 |
| 5.3 | Der einem Divisor zugeordnete Funktionenraum | 138 |
| 5.4 | Differentiale | 143 |
| 5.5 | Erweiterungen des Konstantenkörpers | 147 |
| 5.6 | Der Satz von Riemann-Roch | 149 |
| 5.7 | Funktionenkörper vom Geschlecht 0 | 153 |
| 5.8 | Funktionenkörper vom Geschlecht 1 | 155 |
| 6 | Normale Erweiterungen | 159 |
| 6.1 | Zerlegungsgruppe und Verzweigungsgruppen | 159 |
| 6.2 | Neuer Beweis des Dedekindschen Differentensatzes | 163 |
| 6.3 | Primidealzerlegung in einem Zwischenkörper | 165 |
| 6.4 | Kreisteilungskörper | 167 |
| 6.5 | Der erste Fall der Fermatschen Vermutung | 171 |
| 6.6 | Lokalisierung | 175 |
| 6.7 | Die obere Numerierung der Verzweigungsgruppen | 177 |
| 6.8 | Kummersche Erweiterungen | 182 |
| 7 | <i>L</i>-Reihen | 188 |
| 7.1 | Von der Riemannschen ζ -Funktion zu den Heckschen <i>L</i> -Reihen | 188 |
| 7.2 | Normierte Bewertungen | 192 |
| 7.3 | Adele | 193 |
| 7.4 | Idele | 196 |
| 7.5 | Ideleklassengruppe und Strahlklassengruppe | 198 |
| 7.6 | Hecke-Charaktere | 202 |
| 7.7 | Analysis auf lokalen additiven Gruppen | 203 |
| 7.8 | Analysis auf der Adelegruppe | 207 |
| 7.9 | Die multiplikative Gruppe eines lokalen Körpers | 211 |
| 7.10 | Die lokale Funktionalgleichung | 213 |
| 7.11 | Berechnung von $\rho(c)$ für $K = \mathbb{R}$ | 215 |
| 7.12 | Berechnung von $\rho(c)$ für $K = \mathbb{C}$ | 218 |
| 7.13 | Berechnung der ρ -Faktoren für K nicht-archimedisch | 220 |
| 7.14 | Beziehungen zwischen ρ -Faktoren | 223 |
| 7.15 | Analysis auf der Idelegruppe | 224 |

| | |
|---|------------|
| 7.16 Globale ζ -Funktionen | 227 |
| 7.17 Die Dedekindsche ζ -Funktion | 231 |
| 7.18 Hecksche L -Reihen | 235 |
| 7.19 Kongruenz-Zetafunktionen | 237 |
| 8 Anwendungen der Heckschen L-Reihen | 243 |
| 8.1 Die Zerlegung von Primzahlen in algebraischen Zahlkörpern | 243 |
| 8.2 Das Nichtverschwinden der L -Reihen an der Stelle 1 | 246 |
| 8.3 Die Verteilung von Primidealen in algebraischen Zahlkörpern | 249 |
| 8.4 Die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung | 253 |
| 9 Quadratische Zahlkörper | 257 |
| 9.1 Quadratische Formen und Ordnungen in quadratischen Zahlkörpern | 257 |
| 9.2 Berechnung der Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper . . . | 263 |
| 9.3 Kettenbrüche | 266 |
| 9.4 Periodische Kettenbrüche | 271 |
| 9.5 Die Grundeinheit in Ordnungen von reell-quadratischen Zahlkörpern | 275 |
| 9.6 Der Charakter eines quadratischen Zahlkörpers | 281 |
| 9.7 Die arithmetische Klassenzahlformel | 283 |
| 9.8 Die Berechnung der Gaußschen Summe | 289 |
| 10 Ausblick | 294 |
| 10.1 Absolut-abelsche Erweiterungen | 294 |
| 10.2 Der Klassenkörper zur Strahlklassengruppe | 295 |
| 10.3 Lokale Klassenkörpertheorie | 299 |
| 10.4 Formulierung der Klassenkörpertheorie mit Hilfe von Idelen | 300 |
| A Teilbarkeitstheorie | 303 |
| A.1 Teilbarkeit in Monoiden | 303 |
| A.2 Hauptidealringe | 305 |
| A.3 Euklidische Ringe | 307 |
| A.4 Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen | 309 |
| A.5 Moduln über Euklidischen Ringen | 315 |
| A.6 Arithmetik von Polynomen über Ringen | 317 |
| B Spur, Norm, Differente und Diskriminante | 318 |
| C Harmonische Analyse auf lokalkompakten abelschen Gruppen | 322 |
| C.1 Topologische Gruppen | 322 |
| C.2 Der Pontrjaginsche Dualitätssatz | 322 |
| C.3 Das Haarsche Integral | 323 |
| C.4 Das beschränkte direkte Produkt | 327 |
| C.5 Die Poissonsche Summenformel | 332 |
| Literaturverzeichnis | 335 |
| Sachwortverzeichnis | 340 |