

Inhalt

Prolog

Die Entstehung der Algebra	1
Das Erbe der Griechen	1
Die Renaissance in Italien	1
Auf dem Weg zur modernen Algebra	2
Symmetrien	3
Transformationen	3
Affine und euklidische Räume	3
Die Bewegungsgruppe in der euklidischen Ebene	5
Symmetrie von Objekten	5

Teil Gruppen

1 Gruppen	9
1.1 Grundlegende Begriffe	9
1.2 Untergruppen und Homomorphismen	14
1.3 Direkte Produkte und Summen	15
1.4 Aktionen	17
1.5 Normalteiler und Faktorgruppen	23
1.6 Zyklische Gruppen	25
1.7 Anhang: Der euklidische Algorithmus	27
Übungsaufgaben	27
2 Die Sätze von Sylow	31
2.1 Die Klassengleichung	31
2.2 Exponenten	31
2.3 p-Sylow-Untergruppen	32
Übungsaufgaben	34
3 Der Satz von Jordan-Hölder	35
3.1 Auflösbare und einfache Gruppen	35
3.2 Verfeinerung von Normalreihen	36
Übungsaufgaben	39
4 Symmetrie	41
4.1 Permutationsgruppen	41
4.2 Beispiele	43
4.2.1 Die Gruppe S_4	43
4.2.2 Die Gruppe A_4	44
4.2.3 Die Gruppe S_4	44

4.2.4 Die Gruppe A_5	45
Übungsaufgaben	45
5 Platonische Körper	47
5.1 Polytope und Polyeder	47
5.2 Das Tetraeder	49
5.3 Der Würfel und das Oktaeder	50
5.4 Das Dodekaeder und das Ikosaeder	50
6 Universelle Konstruktionen	52
6.1 Produkte und Koprodukte von Mengen	52
6.2 Produkte und Koprodukte von Gruppen	53
6.3 Semidirekte Produkte	55
6.4 Freie Gruppen	57
6.5 Beispiele	60
Übungsaufgaben	61
7 Endlich erzeugte abelsche Gruppen	63
7.1 Freie abelsche Gruppen	63
7.2 Torsion in Gruppen	65
7.3 Struktur endlicher abelscher Gruppen	66
Übungsaufgaben	68
 Teil II Ringtheorie 	
8 Ringe	69
8.1 Grundlagen	69
8.2 Unterringe und Homomorphismen	71
8.3 Produkte von Ringen	72
8.4 Ideale und Quotientenringe	73
8.5 Ideale in kommutativen Ringen	75
8.6 Der chinesische Restsatz	77
Übungsaufgaben	79
9 Lokalisierung	82
9.1 Lokalisierung von Ringen	82
9.2 Ideale und Lokalisierung	84
Übungsaufgaben	84
10 Hauptidealringe und faktorielle Ringe	85
10.1 Faktorielle Ringe	85
10.2 Euklidische Ringe	87
Übungsaufgaben	87

11 Quadratische Zahlringe	89
11.1 Zahlringe	89
11.2 Einheiten	90
11.3 Die Pell'sche Gleichung	91
11.4 Primelemente im gaußschen Zahlring	94
Übungsaufgaben	95
12 Polynomringe	96
12.1 Polynome	96
12.2 Polynome in mehreren Variablen	97
12.3 Auswerten von Polynomen	98
12.4 Potenzreihen	99
12.5 Derivationen	100
12.6 Symmetrische Funktionen	101
12.7 Resultante und Diskriminante	104
12.8 Eindeutige Primfaktorzerlegung	107
12.9 Irreduzibilität	109
Übungsaufgaben	110

Teil III

Abriss der Körpertheorie

13 Grundlagen der Körpertheorie	113
13.1 Körper und Primkörper	113
13.2 Körpererweiterungen	114
13.3 Algebraische Körpererweiterungen	115
13.4 Algebraisch abgeschlossene Erweiterungen	117
13.5 Konjugierte Erweiterungen	118
Übungsaufgaben	119
14 Theorie der Körpererweiterungen	121
14.1 Separabilität	121
14.2 Inseparabilität	126
14.3 Normale Erweiterungen	127
Übungsaufgaben	128

Teil IV

Galois-Theorie

15 Die Galois-Korrespondenz	130
15.1 Galois-Erweiterungen	130
15.2 Hauptsatz der Galois-Theorie	131
15.3 Ein Beispiel	135
15.4 Anwendungen der Galois-Theorie	136

Übungsaufgaben	138
16 Kreisteilungskörper.....	140
16.1 Einheitswurzeln	140
16.2 Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms.....	143
Übungsaufgaben	146
17 Das quadratische Reziprozitätsgesetz.....	147
17.1 Quadratische Erweiterungen.....	147
17.2 Gaussche Summen	148
17.3 Das quadratische Reziprozitätsgesetz.....	150
Übungsaufgaben	152
18 Auflösung durch Radikale.....	153
18.1 Der Satz von Speiser.....	153
18.2 Kummer-Theorie.....	154
18.3 Artin-Schreier-Theorie.....	157
18.4 Zyklische Erweiterungen.....	158
18.5 Der Hauptsatz.....	159
18.6 Kubische Gleichungen.....	160
19 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.....	163

Teil V

Darstellungen von endlichen Gruppen

20 Grundlagen.....	166
20.1 Darstellungen.....	166
20.2 Grundlegende Beispiele.....	167
20.3 Projektoren.....	170
20.4 Irreduzible Darstellungen.....	172
20.5 Die induzierte Darstellung.....	174
20.6 Adjungierte Funktoren.....	178
Übungsaufgaben.....	179
21 Charaktere.....	182
21.1 Der Charakter einer Darstellung.....	182
21.2 Orthogonalitätsrelationen.....	183
21.3 Zerlegung der regulären Darstellung.....	186
21.4 Anzahl der irreduziblen Darstellungen.....	187
21.5 Beispiele.....	189
21.5.1 Die Gruppe S_2	189
21.5.2 Zyklische Gruppen.....	189
21.5.3 Die Gruppe S_3	189
21.5.4 Die Gruppe A_4	190

21.5.5 Die Gruppe S_4	191
Übungsaufgaben	191

Teil VI

Moduln und Algebren

22 Moduln und Algebren	193
22.1 Grundlegende Begriffe	193
22.2 Homomorphismen und freie Moduln	194
22.3 Vollständig reduzible Moduln	196
22.4 Der Satz von Wedderburn	198
22.5 Quaternionenalgebren	200
Übungsaufgaben	202
23 Tensorprodukte	204
23.1 Tensorprodukt von Moduln	204
23.2 Assoziativität des Tensorproduktes	205
23.3 Homomorphismen und direkte Summen	207
23.4 Tensorprodukt von Algebren	208
23.5 Die Tensoralgebra	209
23.6 Die symmetrische Algebra	211
23.7 Die Clifford-Algebra	211
Literaturverzeichnis	213
Liste der Symbole	215
Index	217