

---

# Inhaltsverzeichnis

---

## Teil I Maßtheorie

---

<b>1</b>	<b>Grundlagen der Maßtheorie</b> .....	3
1.1	Das Maßproblem .....	3
1.2	Mengensysteme .....	9
1.3	Messbare Abbildungen .....	16
1.4	Maße .....	20
<b>2</b>	<b>Das Lebesgue-Integral</b> .....	27
2.1	Lebesgue-Integral und Konvergenzsätze .....	27
2.2	Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral .....	37
2.3	Der Satz von Fubini .....	42
2.4	Norm-Ungleichungen und $L^p$ -Konvergenz .....	45
2.5	Der Satz von Radon-Nikodym .....	49

---

## Teil II Wahrscheinlichkeitstheorie

---

<b>3</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b> .....	57
3.1	Die Axiomatik .....	57
3.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße .....	62
3.3	Stetige Verteilungen .....	68
3.4	Anwendung Physik: Quantum Computation .....	77
<b>4</b>	<b>Zufallsvariablen</b> .....	89
4.1	Grundbegriffe .....	89
4.2	Momente .....	91
4.3	Mehrdimensionale Verteilungen .....	107
4.4	Anwendung Finanzmathematik: Value at Risk .....	113

<b>5</b>	<b>Unabhängigkeit</b> .....	119
5.1	Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....	119
5.2	Stochastische Unabhängigkeit .....	123
5.3	Summen und Produkte .....	127
5.4	Anwendung Nachrichtentechnik: Decodierung .....	132
<b>6</b>	<b>Folgen und Reihen unabhängiger Zufallsvariablen</b> .....	143
6.1	0-1-Gesetze .....	143
6.2	Gesetze der großen Zahlen .....	150
6.3	Das Drei-Reihen-Theorem .....	162
6.4	Anwendung Informationstheorie: Datenkompression .....	165
<b>7</b>	<b>Der zentrale Grenzwertsatz</b> .....	173
7.1	Schwache Konvergenz .....	173
7.2	Charakteristische Funktionen .....	180
7.3	Die Normalverteilung .....	194
7.4	Der zentrale Grenzwertsatz .....	201
7.5	Anwendung Nachrichtentechnik: Mobilfunkkanäle .....	209
<b>8</b>	<b>Bedingte Erwartungen</b> .....	215
8.1	Definition, Existenz und Eindeutigkeit .....	215
8.2	Eigenschaften bedingter Erwartungen .....	219

---

**Teil III Stochastische Prozesse**

---

<b>9</b>	<b>Markov-Ketten</b> .....	227
9.1	Übergangswahrscheinlichkeiten .....	227
9.2	Erweiterungen der Markov-Eigenschaft .....	235
9.3	Klassifikation von Zuständen .....	240
9.4	Stationarität .....	250
9.5	Grenzverhalten .....	254
9.6	Anwendung Biologie: Ein Populationsmodell .....	263
<b>10</b>	<b>Poisson-Prozesse</b> .....	267
10.1	Terminologie stochastischer Prozesse .....	267
10.2	Definition des Poisson-Prozesses .....	275
10.3	Konstruktionen rund um den Poisson-Prozess .....	283
10.4	Nichthomogene Poisson-Prozesse .....	292
10.5	Anwendung Versicherungsmathematik: Ruinwahrscheinlichkeit .....	296
<b>11</b>	<b>Zeitdiskrete Martingale</b> .....	301
11.1	Definition und Beispiele .....	301
11.2	Gleichgradige Integrierbarkeit .....	308
11.3	Stoppzeiten und Stoppsätze .....	314
11.4	Konvergenz von Martingalen .....	320

11.5 Das Optional Sampling Theorem ..... 329

11.6 Anwendung Regelungstechnik: Stochastische Filter ..... 334

**12 Brownsche Bewegung** ..... 341

12.1 Brownsche Bewegung und Gauß-Prozesse ..... 341

12.2 Konstruktionen rund um die Brownsche Bewegung ..... 346

12.3 Pfadigenschaften ..... 351

12.4 Die starke Markov-Eigenschaft ..... 359

12.5 Anwendung numerische Mathematik: Globale Minimierung ... 367

**13 Zeitstetige Martingale** ..... 375

13.1 Definition ..... 375

13.2 Stoppsätze in stetiger Zeit ..... 377

13.3 Brownsche Bewegung und Martingale ..... 380

13.4 Konvergenz von Martingalen ..... 387

13.5 Anwendung Finanzmathematik: Preisformeln ..... 392

**14 Itô-Integrale** ..... 405

14.1 Stieltjes-Integrale und Variation ..... 406

14.2 Das Itô-Integral ..... 413

14.3 Lokalisierung ..... 427

14.4 Die Itô-Formel ..... 436

14.5 Anwendung Mikroelektronik: Schaltkreissimulation ..... 448

---

**Teil IV Mathematische Statistik**

---

**15 Schätztheorie** ..... 455

15.1 Das statistische Modell ..... 455

15.2 Suffizienz und Vollständigkeit ..... 460

15.3 Das Maximum-Likelihood-Verfahren ..... 464

15.4 Bayes-Schätzung ..... 475

15.5 Anwendung Nachrichtentechnik: Wortfehleroptimale  
Decodierung ..... 480

**16 Testtheorie** ..... 483

16.1 Das Neyman-Pearson-Lemma ..... 483

16.2 Einseitige Tests ..... 491

16.3 Nichtparametrische Tests ..... 499

16.4 Anwendung medizinische Biometrie: Arzneimittelprüfung ..... 504

**17 Lineare statistische Modelle** ..... 509

17.1 Das lineare Modell ..... 509

17.2 Kleinste-Quadrate-Schätzung ..... 512

17.3 Normalverteilte Fehler ..... 518

17.4 Anwendung Verfahrenstechnik: Datenanalyse bei einem Recovery Boiler .....	530
---	-----

---

**Teil V Anhang**

---

<b>A Existenzaussagen</b> .....	543
A.1 Das Lebesgue-Maß .....	543
A.2 Existenz von Markov-Ketten .....	553
A.3 Ein Existenzsatz von Kolmogorov .....	555
A.4 Brownsche Bewegungen .....	562
<b>B <math>L^p</math>-Räume</b> .....	569
<b>C Wertetabellen</b> .....	577
C.1 Verteilung der Standardnormalverteilung .....	577
C.2 Quantile der $t$ -Verteilung .....	578
C.3 Quantile der $\chi^2$ -Verteilung .....	579
<b>D Wahrscheinlichkeitstheorie zum Nachschlagen</b> .....	581
<b>E Literaturhinweise</b> .....	585
<b>Literatur</b> .....	589
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	595
<b>Index</b> .....	601