

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Die Geschichte</b> .....	1
<b>1 Ein verwickelter Schwanz</b> .....	21
Welchen Wert hat $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^{-1} \cos(x^{-1} \log x) dx$ ?	
<b>2 Verlässlichkeit im Chaos</b> .....	39
Ein Photon bewegt sich in der $x$ - $y$ Ebene mit Geschwindigkeit 1. Zur Zeit $t = 0$ startet es von $(x, y) = (1/2, 1/10)$ aus in genau östliche Richtung. Um jeden ganzzahligen Gitterpunkt $(i, j)$ der Ebene ist ein kreisförmiger Spiegel vom Radius $1/3$ errichtet. Wie weit entfernt von $(0, 0)$ befindet sich das Photon zur Zeit $t = 10$ ?	
<b>3 Wie weit entfernt ist Unendlich?</b> .....	55
Die unendlich-dimensionale Matrix $A$ mit den Elementen $a_{11} = 1, a_{12} = 1/2, a_{21} = 1/3, a_{13} = 1/4, a_{22} = 1/5, a_{31} = 1/6$ , usw., bildet einen beschränkten Operator auf $\ell^2$ . Welchen Wert hat $\ A\ $ ?	
<b>4 Denke global, handle lokal</b> .....	93
Welchen Wert hat das globale Minimum der Funktion	
$e^{\sin(50x)} + \sin(60e^y) + \sin(70 \sin x) + \sin(\sin(80y))$ $- \sin(10(x+y)) + (x^2 + y^2)/4?$	
<b>5 Eine komplexe Optimierung</b> .....	125
Es sei $p(z)$ das kubische Polynom, welches die Funktion $f(z) = 1/\Gamma(z)$ auf dem komplexen Einheitskreis in der Supremumsnorm $\ \cdot\ _{\infty}$ bestapproximiert. Welchen Wert hat $\ f - p\ _{\infty}$ ?	

**6 Weiche ab, um fair zurückzukehren** ..... 149

Ein Floh startet in  $(0, 0)$  eine asymmetrische Irrfahrt auf dem ganzzahligen zweidimensionalen Gitter: In jedem Schritt hüpfert er mit Wahrscheinlichkeit  $1/4$  nach Norden bzw. Süden, mit Wahrscheinlichkeit  $1/4 + \epsilon$  nach Osten und mit Wahrscheinlichkeit  $1/4 - \epsilon$  nach Westen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Floh im Laufe seiner Wanderschaft den Ausgangspunkt  $(0, 0)$  jemals wieder erreicht, beträgt  $1/2$ . Welchen Wert hat die Abweichung  $\epsilon$ ?

**7 Zu groß, als dass einfach; zu klein, als dass schwierig** ..... 181

Es sei  $A$  die  $20\,000 \times 20\,000$  Matrix, deren Elemente sämtlich Null sind bis auf die Primzahlen  $2, 3, 5, 7, \dots, 224737$  in der Hauptdiagonalen und die Elemente  $a_{ij} = 1$  für  $|i - j| = 1, 2, 4, 8, \dots, 16384$ . Welchen Wert hat das  $(1, 1)$ -Element von  $A^{-1}$ ?

**8 Im Augenblick der Hitze** ..... 211

Eine quadratische Platte  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  hat die Temperatur  $u = 0$ . Zur Zeit  $t = 0$  wird die Temperatur entlang einer der vier Seiten auf  $u = 5$  erhöht, während sie entlang der anderen drei Seiten auf  $u = 0$  gehalten wird und sich dann gemäß  $u_t = \Delta u$  Wärme in der Platte ausbreitet. Wann wird die Temperatur  $u = 1$  im Zentrum der Platte erreicht?

**9 Gradus ad Parnassum** ..... 227

Für welchen Wert  $\alpha \in [0, 5]$  nimmt das parameterabhängige Integral  $I(\alpha) = \int_0^2 (2 + \sin(10\alpha)) x^\alpha \sin(\alpha/(2 - x)) dx$  sein Maximum an?

**10 Treffe die Enden** ..... 251

Ein Partikel startet im Mittelpunkt eines  $10 \times 1$ -Rechtecks eine Brown'sche Bewegung, also eine zweidimensionale Irrfahrt mit infinitesimal kleiner Schrittweite. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft es eher auf die Enden als auf die Seiten des Rechtecks?

**A Konvergenzbeschleunigung** ..... 285

**B Extreme Ziffernjagd** ..... 329

**C Programtext** ..... 335

**D Weitere Probleme** ..... 355

**Literaturverzeichnis** ..... 363

**Stichwortverzeichnis** ..... 373