

---

## Table des matières

Avant-propos .....	VII
Préface .....	IX
Index de symboles .....	1
<b>1 Motivations et généralités sur le réarrangement monotone</b> .....	5
1.1 Notations et rappels .....	6
1.2 Les inégalités de Hardy-Littlewood .....	11
1.3 Etude de la continuité de $u \rightarrow u_*$ .....	16
1.4 Espaces fonctionnels liés au réarrangement .....	21
1.5 Théorème de Ryff et conséquences .....	25
1.6 Construction du réarrangement monotone d'une fonction $u$ en dimension 1 .....	27
<b>2 Réarrangement relatif</b> .....	31
2.1 Calcul d'une dérivée directionnelle : le réarrangement relatif .....	32
2.2 Propriétés immédiates du réarrangement relatif .....	42
2.3 Opérateurs moyennes de première espèce .....	47
2.4 Opérateurs moyennes de seconde espèce .....	49
2.5 Formules intégrales pour une fonction de deux variables et conséquences .....	51
2.6 Applications des opérateurs moyennes .....	54
2.7 Construction d'un réarrangement relatif d'une fonction $v$ par rapport à une fonction $u$ en escalier .....	56
<b>3 Inégalités du type Polyà-Szëgo et régularité du réarrangement</b> .....	61
3.1 Continuité $s \rightarrow u_*(s)$ .....	62

3.2	Formule de Fleming-Rishel	63
3.3	Continuité locale absolue du réarrangement monotone	67
3.4	Réarrangements sphériques et inégalités de Polyà-Szëgo classiques	75
3.5	Inégalités de Polyà-Szëgo ponctuelles pour le $\alpha$ -réarrangement	79
<b>4</b>	<b>Inégalités ponctuelles et inclusions généralisées de Sobolev</b>	<b>83</b>
4.1	Inégalités ponctuelles pour le réarrangement relatif	84
4.2	Inclusions de type général : applications aux espaces de Lorentz	87
4.3	Indice général d'inclusions pour les fonctions à trace nulle	91
4.4	Inclusions de Poincaré-Sobolev-Lorentz	93
4.4.1	Cas des fonctions à trace nulle	93
4.4.2	Cas des fonctions nulles sur une partie du bord	99
4.4.3	Indice général d'inclusion des fonctions à trace quelconque dans $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$	100
4.5	Calcul d'indices d'inclusions	103
4.6	Inégalités d'interpolation pour un espace normé général	111
<b>5</b>	<b>Formalisme d'estimations pour les problèmes aux limites</b>	<b>115</b>
5.1	Quelques lemmes préliminaires	116
5.2	Estimations ponctuelles pour des équations quasilineaires	117
5.2.1	Cas des problèmes de Dirichlet	118
5.2.2	Cas des problèmes Neumann-Dirichlet	124
5.3	Cas des équations de Neumann homogènes	125
5.4	Un problème de valeurs propres non linéaires en physique des plasmas	129
5.5	Quelques remarques subsidiaires	134
<b>6</b>	<b>Continuité de l'application dérivée du réarrangement monotone : <math>u \rightarrow u'_*</math></b>	<b>137</b>
6.1	Quelques résultats généraux : convergence dans $W^{1,1}$ et longueur d'un arc de courbe d'une fonction monotone	137
6.1.1	Les I-fonctions et régularité globale du réarrangement associé	141
6.1.2	Longueur d'arc et propriétés inhérentes	147
6.2	Fonctions co-aïres régulières et continuité de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow u'_* \in L^p(\Omega_*, k)$ )	155
6.2.1	Décomposition d'une fonction de distribution et propriétés diverses	157
6.2.2	Définition d'une fonction co-aïre et continuité	165

<b>7</b>	<b>Continuité forte de l'application réarrangement relatif :</b>	
	$u \rightarrow b_{*u}$ et conséquences . . . . .	173
	7.1 Quelques formules auxiliaires . . . . .	174
	7.2 Approximation spéciale de $b_{*u}$ pour $u \in L^1(\Omega)$ . . . . .	185
	7.3 Convergence forte de la dérivée directionnelle $u \rightarrow u_*$ . . . . .	190
<b>8</b>	<b>Quelques problèmes liés au réarrangement relatif</b> . . . . .	195
	8.1 Optimisation multicontraînte . . . . .	195
	8.1.1 Un théorème abstrait d'existence de multiplicateurs de Lagrange . . . . .	196
	8.1.2 Une application concrète . . . . .	200
	8.2 Sur un problème semilinéaire abstrait et ses applications aux problèmes nonlocaux . . . . .	206
	8.2.1 Théorèmes abstraits pour des problèmes nonlocaux . . . . .	206
	8.2.2 Applications à quelques problèmes nonlocaux . . . . .	209
<b>9</b>	<b>Réarrangement relatif d'une famille de fonctions et problèmes d'évolution</b> . . . . .	215
	9.1 Réarrangement relatif d'une famille de fonctions . . . . .	216
	9.2 Régularité en temps du réarrangement $u_*(t, s)$ . . . . .	217
	9.3 Convergence et continuité pour $u \rightarrow \frac{\partial u_*}{\partial t}$ . . . . .	223
	9.4 Applications aux estimations <i>a priori</i> et à la régularité . . . . .	224
	9.4.1 Un théorème abstrait d'existence et de régularité . . . . .	224
	9.4.2 Cas des équations quasilineaires paraboliques . . . . .	226
	9.4.3 Cas particulier des équations linéaires : estimations ponctuelles de $\int_0^s \left  \frac{\partial u}{\partial t} \right _*(t, \sigma) d\sigma$ et $\int_0^s  u _*(t, \sigma) . . . . .$	231
	9.5 Comportement, pour un temps long, d'un système d'équations en Chemotaxis . . . . .	234
<b>10</b>	<b>Exercices et problèmes</b> . . . . .	243
	10.1 Exercices . . . . .	243
	10.2 Problèmes . . . . .	250
<b>11</b>	<b>Solutions ou indications</b> . . . . .	257
	11.1 Exercices . . . . .	257
	11.2 Problèmes . . . . .	266
<b>12</b>	<b>Commentaires bibliographiques</b> . . . . .	277
	<b>Littérature</b> . . . . .	281
	<b>Index</b> . . . . .	291
	<b>Résumé</b> . . . . .	293