
Table des matières

| | |
|--|-----|
| Avant-propos | VII |
| Préface | IX |
| Index de symboles | 1 |
| 1 Motivations et généralités sur le réarrangement monotone | 5 |
| 1.1 Notations et rappels | 6 |
| 1.2 Les inégalités de Hardy-Littlewood | 11 |
| 1.3 Etude de la continuité de $u \rightarrow u_*$ | 16 |
| 1.4 Espaces fonctionnels liés au réarrangement | 21 |
| 1.5 Théorème de Ryff et conséquences | 25 |
| 1.6 Construction du réarrangement monotone d'une fonction u en dimension 1 | 27 |
| 2 Réarrangement relatif | 31 |
| 2.1 Calcul d'une dérivée directionnelle : le réarrangement relatif | 32 |
| 2.2 Propriétés immédiates du réarrangement relatif | 42 |
| 2.3 Opérateurs moyennes de première espèce | 47 |
| 2.4 Opérateurs moyennes de seconde espèce | 49 |
| 2.5 Formules intégrales pour une fonction de deux variables et conséquences | 51 |
| 2.6 Applications des opérateurs moyennes | 54 |
| 2.7 Construction d'un réarrangement relatif d'une fonction v par rapport à une fonction u en escalier | 56 |
| 3 Inégalités du type Polyà-Szëgo et régularité du réarrangement | 61 |
| 3.1 Continuité $s \rightarrow u_*(s)$ | 62 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.2 | Formule de Fleming-Rishel | 63 |
| 3.3 | Continuité locale absolue du réarrangement monotone | 67 |
| 3.4 | Réarrangements sphériques et inégalités de Polyà-Szëgo classiques | 75 |
| 3.5 | Inégalités de Polyà-Szëgo ponctuelles pour le α -réarrangement | 79 |
| 4 | Inégalités ponctuelles et inclusions généralisées de Sobolev | 83 |
| 4.1 | Inégalités ponctuelles pour le réarrangement relatif | 84 |
| 4.2 | Inclusions de type général : applications aux espaces de Lorentz | 87 |
| 4.3 | Indice général d'inclusions pour les fonctions à trace nulle | 91 |
| 4.4 | Inclusions de Poincaré-Sobolev-Lorentz | 93 |
| 4.4.1 | Cas des fonctions à trace nulle | 93 |
| 4.4.2 | Cas des fonctions nulles sur une partie du bord | 99 |
| 4.4.3 | Indice général d'inclusion des fonctions à trace quelconque dans $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ | 100 |
| 4.5 | Calcul d'indices d'inclusions | 103 |
| 4.6 | Inégalités d'interpolation pour un espace normé général | 111 |
| 5 | Formalisme d'estimations pour les problèmes aux limites | 115 |
| 5.1 | Quelques lemmes préliminaires | 116 |
| 5.2 | Estimations ponctuelles pour des équations quasilineaires | 117 |
| 5.2.1 | Cas des problèmes de Dirichlet | 118 |
| 5.2.2 | Cas des problèmes Neumann-Dirichlet | 124 |
| 5.3 | Cas des équations de Neumann homogènes | 125 |
| 5.4 | Un problème de valeurs propres non linéaires en physique des plasmas | 129 |
| 5.5 | Quelques remarques subsidiaires | 134 |
| 6 | Continuité de l'application dérivée du réarrangement monotone : $u \rightarrow u'_*$ | 137 |
| 6.1 | Quelques résultats généraux : convergence dans $W^{1,1}$ et longueur d'un arc de courbe d'une fonction monotone | 137 |
| 6.1.1 | Les I-fonctions et régularité globale du réarrangement associé | 141 |
| 6.1.2 | Longueur d'arc et propriétés inhérentes | 147 |
| 6.2 | Fonctions co-aïres régulières et continuité de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow u'_* \in L^p(\Omega_*, k)$) | 155 |
| 6.2.1 | Décomposition d'une fonction de distribution et propriétés diverses | 157 |
| 6.2.2 | Définition d'une fonction co-aïre et continuité | 165 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 7 | Continuité forte de l'application réarrangement relatif : | |
| | $u \rightarrow b_{*u}$ et conséquences | 173 |
| | 7.1 Quelques formules auxiliaires | 174 |
| | 7.2 Approximation spéciale de b_{*u} pour $u \in L^1(\Omega)$ | 185 |
| | 7.3 Convergence forte de la dérivée directionnelle $u \rightarrow u_*$ | 190 |
| 8 | Quelques problèmes liés au réarrangement relatif | 195 |
| | 8.1 Optimisation multicontraînte | 195 |
| | 8.1.1 Un théorème abstrait d'existence de multiplicateurs de Lagrange | 196 |
| | 8.1.2 Une application concrète | 200 |
| | 8.2 Sur un problème semilinéaire abstrait et ses applications aux problèmes nonlocaux | 206 |
| | 8.2.1 Théorèmes abstraits pour des problèmes nonlocaux | 206 |
| | 8.2.2 Applications à quelques problèmes nonlocaux | 209 |
| 9 | Réarrangement relatif d'une famille de fonctions et problèmes d'évolution | 215 |
| | 9.1 Réarrangement relatif d'une famille de fonctions | 216 |
| | 9.2 Régularité en temps du réarrangement $u_*(t, s)$ | 217 |
| | 9.3 Convergence et continuité pour $u \rightarrow \frac{\partial u_*}{\partial t}$ | 223 |
| | 9.4 Applications aux estimations <i>a priori</i> et à la régularité | 224 |
| | 9.4.1 Un théorème abstrait d'existence et de régularité | 224 |
| | 9.4.2 Cas des équations quasilineaires paraboliques | 226 |
| | 9.4.3 Cas particulier des équations linéaires : estimations ponctuelles de $\int_0^s \left \frac{\partial u}{\partial t} \right _*(t, \sigma) d\sigma$ et $\int_0^s u _*(t, \sigma)$ | 231 |
| | 9.5 Comportement, pour un temps long, d'un système d'équations en Chemotaxis | 234 |
| 10 | Exercices et problèmes | 243 |
| | 10.1 Exercices | 243 |
| | 10.2 Problèmes | 250 |
| 11 | Solutions ou indications | 257 |
| | 11.1 Exercices | 257 |
| | 11.2 Problèmes | 266 |
| 12 | Commentaires bibliographiques | 277 |
| | Littérature | 281 |
| | Index | 291 |
| | Résumé | 293 |