

Table des matières

Introduction	1
1. Équations, Idéaux, Variétés	5
1.1. Polynômes	6
1.2. Solutions	8
1.3. Correspondance entre l'algèbre et la géométrie	10
1.4. Décomposition primaire	14
1.5. Quelques invariants numériques d'une variété algébrique	19
1.6. Un peu de géométrie projective	21
1.7. Exercices	23
2. Calcul dans une algèbre quotient	27
2.1. Introduction	28
2.2. Réduction des polynômes	28
2.3. Ordres monomiaux	34
2.4. Idéaux monomiaux	36
2.5. Algorithme de construction d'une base de Gröbner	38
2.6. Quelques applications des bases de Gröbner	39
2.7. Bases de Gröbner des sous-modules de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]^m$	41
2.8. Exercices	42
3. Dimension et degré d'une variété algébrique	49
3.1. Dimension d'une variété algébrique	50
3.2. Degré d'une variété algébrique	65
3.3. L'exemple d'une intersection complète	68
3.4. Exercices	74

4. Algèbres de dimension 0	77
4.1. Cas d'une seule variable	78
4.2. Idéaux 0-dimensionnels de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$	80
4.3. Dual de l'algèbre \mathcal{A}	82
4.4. Décomposition de l'algèbre \mathcal{A}	83
4.5. Idempotents de l'algèbre \mathcal{A}	84
4.6. Description des sous-algèbres \mathcal{A}_i de \mathcal{A}	85
4.7. Opérateurs de multiplication de \mathcal{A}	87
4.8. Décomposition des opérateurs de multiplication de \mathcal{A}	90
4.9. Forme de Chow de l'idéal I	91
4.10. Représentation univariée rationnelle	92
4.11. Nombre de racines réelles	96
4.12. Exercices	100
5. Théorie des résultants	105
5.1. Cas d'une variable	106
5.2. Cas multivariable	111
5.3. Résultant sur \mathbb{P}^n	114
5.4. Résultant torique	135
5.5. Résultant et bézoutien	139
5.6. Exercices	140
6. Application des résultants	145
6.1. Intersection de deux courbes planes	146
6.2. Résolution de systèmes surdéterminés	150
6.3. Résoudre en ajoutant une forme linéaire générique	156
6.4. Calcul d'une représentation univariée rationnelle	158
6.5. Résoudre en « cachant » une variable	159
6.6. Problème d'implicitisation	164
6.7. Exercices	166
7. Dualité	171
7.1. Dualité et systèmes inverses	172
7.2. Système inverse d'un point isolé	183
7.3. Interpolation	191
7.4. Exercices	203
8. Algèbres de Gorenstein	207
8.1. Algèbres de Gorenstein	208

8.2. Passage du local au global	214
8.3. Suites régulières et suites quasi-régulières	216
8.4. Théorème de Wiebe	218
8.5. Intersection complète	220
8.6. Exercices	222
9. Résidu algébrique	227
9.1. Définition du résidu et premiers exemples	228
9.2. Lois de transformation	233
9.3. D'autres exemples de résidus	237
9.4. Résidu et résolution algébrique	241
9.5. Résidu local et socle	245
9.6. Quelques applications du résidu	247
9.7. Exercices	249
10. Calcul du résidu et applications	255
10.1. Applications dominantes	256
10.2. Applications commodées	259
10.3. Structure de la matrice bézoutienne	261
10.4. Relations de dépendance algébrique	267
10.5. Algorithme de calcul des résidus multivariables	269
10.6. Applications propres de \mathbb{C}^n	271
10.7. Exposant de Lojasiewicz	274
10.8. Inversion d'une application polynomiale	277
10.9. Exercices	279
Liste des algorithmes	283
Liste des notations	285
Bibliographie	287
Index	301