

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Beispiele aus Konstruktionsberechnung und Mechanik | 1 |
| 1.2 Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung in den Prozeß der Konstruktionsberechnung | 5 |
| 1.3 Finite-Elemente-Verfahren für allgemeine Feldprobleme | 7 |
| 1.4 Die Finite-Elemente-Methode und andere Diskretisierungsverfahren | 9 |
| 1.5 Zur historischen Entwicklung der Finite-Elemente-Methode | 11 |
| 1.6 Gliederung des Buches | 18 |
| | |
| 2 Differentialgleichungsformulierungen für Probleme der Strukturmechanik | 21 |
| 2.1 Tragwerkstypen | 21 |
| 2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen für Scheibe und Stab | 24 |
| 2.2.1 Zustandsgrößen für Scheibe und Stab | 24 |
| 2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen | 25 |
| 2.2.3 Materialgesetz (Elastizitätsgesetz) | 27 |
| 2.2.4 Kinematische Aussagen | 28 |
| 2.2.5 Verschiebungsdifferentialgleichungen | 28 |
| 2.2.6 Randbedingungen | 29 |
| 2.2.7 Zusammenfassung und Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua .. | 33 |
| 2.3 Zustandsgrößen von Balken und Platten | 35 |
| 2.4 Grundgleichungen für Balken und Platten | 38 |
| 2.5 Übungsaufgaben | 41 |
| | |
| 3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie | 49 |
| 3.1 Was ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen und wie setzt man es ein? .. | 50 |
| 3.2 Ableitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen aus den Gleichgewichtsbedingungen | 55 |
| 3.3 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Dirichletsches Variationsprinzip) | 59 |
| 3.4 Zulässige Verschiebungszustände | 63 |
| 3.5 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für einzelne Kontinua | 65 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.5.1 | Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe | 65 |
| 3.5.2 | Das Prinzip für Balken und Platten | 65 |
| 3.6 | Übertragung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf die Wärmeleitungsaufgabe | 69 |
| 3.6.1 | Grundgleichungen der Wärmeleitung | 70 |
| 3.6.2 | Das Prinzip der virtuellen Temperatur | 73 |
| 3.6.3 | Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik | 74 |
| 3.7 | Übungsaufgaben | 76 |
| 4 | Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke und Fachwerke | 85 |
| 4.1 | Ein Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke | 85 |
| 4.1.1 | Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze | 86 |
| 4.1.2 | Verschiebungsansatz für ein Rechteckelement | 88 |
| 4.1.3 | Stetigkeit des Verschiebungsansatzes | 91 |
| 4.1.4 | Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Einführung des Verschiebungsansatzes | 93 |
| 4.1.5 | Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechteckelemente | 95 |
| 4.1.6 | Aufbau und Lösen des Gleichungssystems | 103 |
| 4.1.7 | Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungsenergie | 108 |
| 4.1.8 | Anschauliche Interpretation | 109 |
| 4.1.9 | Zusammenfassung | 114 |
| 4.1.10 | Einfache Beispielrechnung | 118 |
| 4.1.11 | Verbesserte Schnittkraftberechnung | 128 |
| 4.2 | Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente-Verfahren | 132 |
| 4.2.1 | Stetigkeit des Verschiebungsansatzes | 133 |
| 4.2.2 | Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen | 134 |
| 4.2.3 | Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände | 136 |
| 4.2.4 | Symmetrie der Steifigkeitsmatrix | 139 |
| 4.2.5 | Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix | 140 |
| 4.2.6 | Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen | 142 |
| 4.2.7 | Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechteckelementes | 143 |
| 4.3 | Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke | 146 |
| 4.3.1 | Elementierung | 147 |
| 4.3.2 | Das Prinzip der virtuellen Verrückungen | 148 |
| 4.3.3 | 1. Schritt: Festlegung des Elementtyps | 148 |
| 4.3.4 | 2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes | 150 |
| 4.3.5 | 3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale | 150 |
| 4.3.6 | 4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen | 151 |
| 4.3.7 | 5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems | 152 |
| 4.3.8 | 6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte | 153 |
| 4.3.9 | Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes | 154 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3.10 | Beispielrechnung | 156 |
| 4.3.11 | Erweiterung auf räumliche Fachwerke | 156 |
| 4.4 | Übungsaufgaben | 158 |
| 5 | Umsetzung des Verfahrens zu einem Finite-Elemente-Programm ... | 165 |
| 5.1 | Dateneingabe und Ergebnisausgabe | 165 |
| 5.2 | Einbau der Elementmatrizen in die Systemmatrix | 168 |
| 5.3 | Einbau der Verschiebungsrandbedingungen in die Systemmatrizen | 173 |
| 5.4 | Direkter Aufbau der Matrizen des gefesselten Systems | 175 |
| 5.5 | Lösen des Gleichungssystems | 176 |
| 5.6 | Übungsaufgaben | 183 |
| 6 | Zur Klassifikation von Elementen und Ansatzfunktionen | 187 |
| 6.1 | Finite Elemente in der Deformationsmethode | 187 |
| 6.2 | Problemtypen beim Kraftgrößenverfahren | 193 |
| 6.3 | Übungsaufgaben | 196 |
| 7 | Ansatzfunktionen für Elemente vom Scheibentyp | 201 |
| 7.1 | Einleitung | 201 |
| 7.2 | Ansatzfunktionen für Rechteckelemente durch Produktbildung | 202 |
| 7.3 | Ansatzfunktionen für Randpunkt- und Übergangselemente | 210 |
| 7.3.1 | Formfunktionen für Randpunktelemente | 211 |
| 7.3.2 | Entwicklung der Steifigkeitsmatrix von Randpunktelementen | 219 |
| 7.3.3 | Formfunktionen für Übergangselemente | 220 |
| 7.4 | Schiefwinklige und krummlinig berandete Elemente | 223 |
| 7.4.1 | Einleitung | 223 |
| 7.4.2 | Abbildungsvorschriften zur Approximation der Elementgeometrie ... | 225 |
| 7.4.3 | Einführung des Verschiebungsansatzes | 227 |
| 7.4.4 | Transformation des Differentialoperators und des Bereichsdifferentials | 230 |
| 7.4.5 | Aufbau von Elementmatrizen und -vektoren | 232 |
| 7.4.6 | Anmerkungen zur numerischen Integration und zur programmtechnischen Umsetzung | 234 |
| 7.5 | Ansatzfunktionen für Dreieckelemente | 236 |
| 7.5.1 | Dreieckskoordinaten | 237 |
| 7.5.2 | Formfunktionen für gradlinig berandete Dreieckelemente | 239 |
| 7.5.3 | Transformation des Differentialoperators und des Flächendifferentials | 242 |
| 7.5.4 | Integration | 243 |
| 7.5.5 | Krummlinig berandete Dreieckelemente | 244 |
| 7.6 | Anmerkungen zu inkompatiblen Ansätzen | 245 |
| 7.7 | Übungsaufgaben | 248 |

| | |
|---|-----|
| 8 Numerische Probleme | 253 |
| 8.1 Hinweise für den Einsatz krummlinig berandeter Elemente | 253 |
| 8.1.1 Lage der Knoten | 253 |
| 8.1.2 Ordnung der numerischen Integration | 257 |
| 8.2 Kontrollalgorithmen für Element- und Systemmatrizen | 262 |
| 8.3 Genauigkeit und Konvergenzverhalten | 265 |
| 8.3.1 Definition von Begriffen | 266 |
| 8.3.2 Schrankencharakter von Energiegrößen | 268 |
| 8.3.3 Fehlerquellen | 270 |
| 8.3.4 Ein einfacher Konvergenzbeweis | 274 |
| 8.4 Richardson-Extrapolation | 283 |
| 8.5 Beispielrechnungen | 286 |
| 8.5.1 Scheibenstreifen unter periodischer, treppenförmiger Randschubbelastung | 286 |
| 8.5.2 Kragsscheibe unter Rand- und Flächenlasten | 288 |
| 8.6 Einige praktische Schlußfolgerungen aus den Untersuchungen zum Genauigkeits- und Konvergenzverhalten | 294 |
| 8.7 Übungsaufgaben | 296 |
| | |
| 9 Finite Elemente für Balken und Platten | 299 |
| 9.1 Vorbemerkung | 299 |
| 9.2 Forderungen an Balken- und Plattenelemente | 301 |
| 9.3 Elemente für schubstarre Balken und Platten | 304 |
| 9.3.1 Hermite-Ansätze für Balkenelemente | 304 |
| 9.3.2 Ein kompatibles Plattenrechteckelement | 307 |
| 9.3.3 Zwei Plattenrechteckelemente mit 12 Freiheitsgraden | 312 |
| 9.3.4 Einige Bemerkungen zu isoparametrischen Viereckelementen für schubstarre Platten | 314 |
| 9.3.5 Dreieckelemente für schubstarre Platten | 315 |
| 9.3.6 Schlußfolgerungen | 325 |
| 9.4 Elemente für schubweiche Balken und Platten | 326 |
| 9.4.1 Elemente für schubweiche Balken | 327 |
| 9.4.2 Elemente für schubweiche Balken auf der Grundlage eines modifizierten Variationsprinzips | 336 |
| 9.4.3 Viereckelemente für schubweiche Platten | 340 |
| 9.5 Gemischt-hybride Verfahren zur Entwicklung von Steifigkeitsmatrizen für Flächentragwerken | 344 |
| 9.6 Verwendung von isoparametrischen Scheiben- und Volumenelementen für Balken- und Plattenstrukturen | 346 |
| 9.7 Zusammenfassender Vergleich der Elemente für die Behandlung von Biegestrukturen | 349 |
| 9.8 Übungsaufgaben | 351 |

| | |
|---|-----|
| 10 Theorie 2. Ordnung, Stabilität, Schwingungen | 354 |
| 10.1 Vorbemerkung | 354 |
| 10.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Balken | 355 |
| 10.2.1 Nichtlineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen | 356 |
| 10.2.2 Lineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen .. | 359 |
| 10.3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Platten | 362 |
| 10.4 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für dynamische Probleme | 363 |
| 10.5 Berücksichtigung von Dämpfung im Stoffgesetz | 367 |
| 10.6 Einige numerische Ergebnisse zum Beulen und Schwingen von Platten .. | 370 |
| 10.6.1 Plattenbeulen | 371 |
| 10.6.2 Plattenschwingungen | 375 |
| 10.6.3 Ausnutzung der Symmetrie bei Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung | 378 |
| 10.7 Übungsaufgaben | 379 |
| 11 Ein Verfahren der finiten Elemente für ebene Rahmentragwerke .. | 384 |
| 11.1 Elementierung | 385 |
| 11.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statische Probleme nach Theorie 1. und 2. Ordnung | 386 |
| 11.3 Matrizen des schubweichen Stabelementes | 386 |
| 11.4 Aufbau der Systemmatrizen | 388 |
| 11.5 Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkräfte an den Elementenden | 390 |
| 11.6 Zustandsgrößen im Element | 392 |
| 11.6.1 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung | 392 |
| 11.6.2 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 2. Ordnung | 394 |
| 11.7 Beispielrechnungen | 396 |
| 11.8 Übungsaufgaben | 401 |
| 12 Ein kombiniertes Verfahren für rotationssymmetrische Flächentragwerke | 407 |
| 12.1 Problemdefinition | 407 |
| 12.2 Voraussetzungen und Grundgedanken des Verfahrens | 409 |
| 12.3 Differentialgleichungsformulierung und Prinzipformulierung | 411 |
| 12.4 Ausnutzung der Rotationssymmetrie | 414 |
| 12.5 Numerische Integration des homogenen Differentialgleichungssystems im statischen Fall | 416 |
| 12.6 Teilinversion zur Steifigkeitsmatrix und Ermittlung von Einheitsverschiebungszuständen | 417 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 12.7 | Ermittlung der Massenmatrix und des Belastungsvektors mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen | 419 |
| 12.8 | Aufbau des Gleichungssystems | 420 |
| 12.9 | Einige Ergebnisse | 421 |
| 12.10 | Einsatzgrenzen des Verfahrens | 426 |
| 12.11 | Schlußfolgerungen | 427 |
| 12.12 | Kopplung von Finite-Elemente- und Mehrkörpersystem-Modellen | 428 |
| 12.13 | Übungsaufgaben | 430 |
| 13 | Einstieg in nichtlineare Berechnungsmethoden | 433 |
| 13.1 | Spannungs- und Verzerrungsmaße | 434 |
| 13.2 | Materialgesetz | 437 |
| 13.3 | Prinzip der virtuellen Verrückungen | 438 |
| 13.4 | Geometrie- und Verschiebungsansätze | 439 |
| 13.5 | Transformationen | 440 |
| 13.6 | Aufstellen des Gleichungssystems | 442 |
| 13.7 | Iterationsvorschrift | 443 |
| 13.8 | Elementsteifigkeitsmatrix | 445 |
| 13.9 | Kontrolle der Elementmatrizen | 448 |
| 13.10 | Ablauf des Verfahrens | 449 |
| 13.11 | Beispiel | 454 |
| 13.12 | Übungsaufgaben | 456 |
| 14 | Anhang | 459 |
| 14.1 | Einige Bemerkungen zu den Integralsätzen | 459 |
| 14.1.1 | Greensche Formel | 459 |
| 14.1.2 | Integralsatz für die Membran | 461 |
| 14.1.3 | Integralsatz für die Scheibe | 461 |
| 14.1.4 | Integralsatz für die schubstarre Platte | 463 |
| 14.2 | Grundlagen und Grundbegriffe der Variationsrechnung | 464 |
| 14.2.1 | Fundamentalsatz der Variationsrechnung | 464 |
| 14.2.2 | Variationsprinzip, Funktional, Nebenbedingungen, wesentliche Randbedingungen | 465 |
| 14.2.3 | Durchführung der Variation | 467 |
| 14.2.4 | Eulersche Differentialgleichung | 470 |
| 14.2.5 | Einbau von Nebenbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren | 471 |
| 14.2.6 | Kanonisches Variationsprinzip | 475 |
| 14.2.7 | Übergang zum Castiglianoschen Funktional | 476 |
| 14.2.8 | Einbau von Übergangsbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren: Das Funktional von Pian | 477 |
| 14.2.9 | Einbau von Randbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren in das diskretisierte Dirichletsche Funktional | 479 |

| | |
|---|------------|
| 14.3 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften | 481 |
| 14.3.1 Struktursymmetrie | 481 |
| 14.3.2 Symmetrische und antimetrische Belastung | 482 |
| 14.3.3 Behandlung einer Teilstruktur | 483 |
| 14.3.4 Mehrfachsymmetrie | 487 |
| 14.3.5 Zyklische Rotationssymmetrie | 488 |
| 14.4 Übungsaufgaben | 493 |
| 15 Lösungen der Übungsaufgaben | 497 |
| 15.1 Vorbemerkungen | 497 |
| 15.2 Lösungen zu Kapitel 2 | 497 |
| 15.3 Lösungen zu Kapitel 3 | 505 |
| 15.4 Lösungen zu Kapitel 4 | 511 |
| 15.5 Lösungen zu Kapitel 5 | 522 |
| 15.6 Lösungen zu Kapitel 6 | 528 |
| 15.7 Lösungen zu Kapitel 7 | 535 |
| 15.8 Lösungen zu Kapitel 8 | 544 |
| 15.9 Lösungen zu Kapitel 9 | 548 |
| 15.10 Lösungen zu Kapitel 10 | 552 |
| 15.11 Lösungen zu Kapitel 11 | 558 |
| 15.12 Lösungen zu Kapitel 12 | 568 |
| 15.13 Lösungen zu Kapitel 13 | 569 |
| 15.14 Lösungen zu Kapitel 14 | 574 |
| Symbole und Bezeichnungen | 578 |
| Literatur | 588 |
| Sachverzeichnis | 605 |