

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektoranalysis</b> .....	1
1.1	Einleitung .....	1
1.2	Vektoralgebra .....	2
1.2.1	Vektoraddition .....	2
1.2.2	Das Skalarprodukt .....	3
1.2.3	Das Vektorprodukt .....	4
1.3	Vektordifferenzialoperationen .....	9
1.3.1	Differenziation nach einem Parameter .....	10
1.3.2	Der Gradientenoperator .....	14
1.3.3	Die Divergenz eines Vektorfeldes .....	16
1.3.4	Die Rotation eines Vektorfeldes .....	18
1.3.5	Mehrfache Differenzialoperationen .....	20
1.4	Vektorintegraloperationen .....	21
1.4.1	Der Gauß'sche Satz .....	21
1.4.2	Der Green'sche Satz .....	23
1.4.3	Der Stokes'sche Satz .....	24
1.5	Orthogonale krummlinige Koordinaten .....	30
1.5.1	Zylinderkoordinaten .....	32
1.5.2	Kugelkoordinaten .....	34
1.6	Tensoren .....	35
1.6.1	Andere Definition eines Vektors .....	35
1.6.2	Definition eines Tensors .....	40
1.6.3	Diagonalisierung eines Tensors .....	41
1.6.4	Differenzial- und Integraloperationen .....	44
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen und Dirac's <math>\delta</math>-Funktion</b> .....	49
2.1	Einleitung .....	49
2.2	Komplexe Zahlen und elementare Funktionen .....	49
2.2.1	Komplexe Zahlen .....	50
2.2.2	Elementare Rechenregeln .....	50
2.2.3	Die Gauß'sche Zahlenebene .....	51

2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen . . . . .	54
2.2.5	Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	56
2.2.6	Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	57
2.2.7	Der Logarithmus . . . . .	58
2.2.8	Abschließende Bemerkungen . . . . .	59
2.3	Die Dirac'sche $\delta$ -Funktion . . . . .	62
2.3.1	Definition der $\delta$ -Funktion . . . . .	62
2.3.2	Rechenregeln der $\delta$ -Funktion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Der Funktionenraum . . . . .</b>	<b>71</b>
3.1	Einleitung . . . . .	71
3.2	Die Fourier-Reihen . . . . .	71
3.3	Das Fourier-Integral . . . . .	76
3.4	Orthogonale Funktionensysteme . . . . .	79
3.4.1	Das Skalarprodukt . . . . .	79
3.4.2	Reihen nach orthogonalen Funktionen . . . . .	81
3.4.3	Operatoren im Hilbert-Raum . . . . .	83
3.5	Das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Partielle Differenzialgleichungen . . . . .</b>	<b>99</b>
4.1	Einleitung . . . . .	99
4.2	Lineare partielle Differenzialgleichungen der Physik . . . . .	99
4.3	Die Separationsmethode . . . . .	102
4.3.1	Beispiel . . . . .	102
4.3.2	Separation der Helmholtz-Gleichung . . . . .	104
4.4	Die Methode der Green-Funktion . . . . .	108
4.4.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	108
4.4.2	Eigenschaften der Green-Funktion . . . . .	111
4.4.3	Auffindung der Green-Funktion . . . . .	113
4.4.4	Die Green-Funktion der Helmholtz-Gleichung . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Spezielle Funktionen . . . . .</b>	<b>129</b>
5.1	Einleitung . . . . .	129
5.2	Die Gammafunktion und Verwandtes . . . . .	129
5.3	Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen . . . . .	137
5.3.1	Lösung von Differenzialgleichungen durch Potenzreihen . . . . .	137
5.3.2	Differenzialgleichungen mit periodischen Koeffizienten . . . . .	145
5.4	Kugelfunktionen . . . . .	148
5.4.1	Die Legendre-Polynome . . . . .	149
5.4.2	Zweite Definition der Legendre-Polynome . . . . .	151
5.4.3	Orthogonalität der Legendre-Polynome . . . . .	156
5.4.4	Die zugeordneten Legendre-Polynome . . . . .	157
5.4.5	Die Kugelflächenfunktionen . . . . .	159
5.4.6	Das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen . . . . .	161

5.5	Bessel-Funktionen .....	167
5.5.1	Reihenlösung der Bessel'schen Differenzialgleichung ..	168
5.5.2	Bessel-Funktionen mit ganzzahligem Index.....	170
5.5.3	Rekursionsformeln und Verwandtes .....	173
5.5.4	Sphärische Bessel-Funktionen .....	175
5.5.5	Modifizierte Bessel-Funktionen .....	179
5.5.6	Das Sturm-Liouville-Problem der Bessel-Funktionen .	181
5.6	Die Hermite- und Laguerre-Funktionen .....	189
5.6.1	Die Hermite-Funktionen .....	190
5.6.2	Die Laguerre-Funktionen .....	195
<b>6</b>	<b>Variationsrechnung .....</b>	<b>205</b>
6.1	Einleitung .....	205
6.2	Die Euler-Gleichung der Variationsrechnung .....	205
6.3	Variationsproblem mit mehreren abhängigen Veränderlichen .	211
6.4	Variationsproblem mit mehreren unabhängigen Veränderlichen .....	213
6.5	Die isoperimetrischen Probleme .....	216
6.5.1	Isoperimetrische Probleme mit mehreren abhängigen Veränderlichen .....	217
6.5.2	Isoperimetrische Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen .....	220
<b>7</b>	<b>Theorie komplexer Funktionen.....</b>	<b>223</b>
7.1	Einleitung .....	223
7.2	Die analytischen Funktionen .....	223
7.2.1	Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen ..	224
7.2.2	Die konforme Abbildung .....	226
7.2.3	Elementare Rechenoperationen analytischer Funktionen .....	227
7.2.4	Singularitäten analytischer Funktionen .....	228
7.2.5	Der unendlich ferne Punkt .....	231
7.3	Integration im komplexen Gebiet .....	231
7.3.1	Linienintegrale in der komplexen Zahlenebene .....	231
7.3.2	Der Fundamentalsatz von Cauchy .....	233
7.3.3	Der Fundamentalsatz für mehrfach zusammenhängende Bereiche.....	241
7.3.4	Die Integralformel von Cauchy .....	243
7.3.5	Analytische Fortsetzung .....	247
7.3.6	Der Cauchy'sche Residuensatz .....	248
7.3.7	Anwendungen des Residuensatzes.....	249
7.3.8	Berechnung bestimmter Integrale .....	252
7.4	Die Laplace-Transformation.....	262
7.4.1	Vorbemerkungen .....	262

	7.4.2	Definition der Laplace-Transformation . . . . .	262
	7.4.3	Drei wichtige Theoreme . . . . .	263
<b>8</b>		<b>Wahrscheinlichkeit und Statistik . . . . .</b>	<b>269</b>
	8.1	Einleitende Bemerkungen . . . . .	269
	8.2	Kombinatorik . . . . .	269
	8.2.1	Permutationen und Kombinationen . . . . .	269
	8.2.2	Die Binomialkoeffizienten . . . . .	272
	8.3	Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	274
	8.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	274
	8.3.2	Mittelwert und quadratische Abweichung . . . . .	275
	8.4	Spezielle Verteilungen . . . . .	277
	8.4.1	Die Bernoulli-Verteilung . . . . .	277
	8.4.2	Die Gauß-Verteilung . . . . .	278
	8.4.3	Die Poisson-Verteilung . . . . .	281
<b>A</b>		<b>Differenzial- und Integralrechnung . . . . .</b>	<b>283</b>
	A.1	Differenzialrechnung . . . . .	283
	A.1.1	Die Ableitung . . . . .	283
	A.1.2	Die partielle Ableitung . . . . .	283
	A.1.3	Elementare Ableitungsregeln . . . . .	284
	A.1.4	Ableitung trigonometrischer und inverser Funktionen . . . . .	285
	A.1.5	Ableitung hyperbolischer und inverser Funktionen . . . . .	285
	A.1.6	Differenziale . . . . .	285
	A.1.7	Maxima und Minima einer Funktion . . . . .	286
	A.1.8	Mittelwertsätze . . . . .	286
	A.1.9	Unbestimmte Formen . . . . .	287
	A.1.10	Der Taylor'sche Satz . . . . .	287
	A.1.11	Reihen elementarer Funktionen . . . . .	288
	A.1.12	Differenziation von Integralen . . . . .	289
	A.2	Integralrechnung . . . . .	289
	A.2.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	289
	A.2.2	Integration von Polynomen . . . . .	290
	A.2.3	Integration rationaler Funktionen . . . . .	290
	A.2.4	Integration trigonometrischer Funktionen . . . . .	291
	A.2.5	Exponentialfunktion und hyperbolische Funktionen . . . . .	291
	A.2.6	Integration von Wurzelausdrücken . . . . .	292
	A.2.7	Integration von Produkten . . . . .	292
	A.2.8	Das bestimmte Integral . . . . .	293
	A.2.9	Ungleichungen zwischen Integralen . . . . .	294
	A.2.10	Uneigentliche Integrale . . . . .	294
	A.2.11	Bestimmte Integrale von Funktionen . . . . .	295
	A.2.12	Variablentransformation bei Mehrfachintegralen . . . . .	295
	A.3	Elementare Differenzialgleichungen . . . . .	296
	A.3.1	Methode der Variablentrennung . . . . .	296

A.3.2	Methode der Variablensubstitution .....	296
A.3.3	Lagrange-Methode der Variation der Konstanten ....	297
A.3.4	Methode von Bernoulli .....	297
A.3.5	Erniedrigung des Grades einer Differenzialgleichung ..	297
A.3.6	Vollständiges Differenzial .....	298
<b>B</b>	<b>Lineare Algebra</b> .....	299
B.1	Matrizen .....	299
B.1.1	Matrixdefinition und Multiplikation .....	299
B.1.2	Matrixtypen und Rechenregeln .....	300
B.1.3	Matrizen mit komplexen Elementen .....	302
B.2	Determinanten .....	304
B.2.1	Definition einer Determinante .....	304
B.2.2	Rechenregeln für Determinanten .....	304
B.3	Lösung eines linearen Gleichungssystems .....	305
B.3.1	Inhomogenes Gleichungssystem .....	305
B.3.2	Homogenes Gleichungssystem .....	306
<b>C</b>	<b>Einige ergänzende Bücher</b> .....	309
<b>Index</b>	.....	311