
Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Was ist Modellierung?	1
1.2	Aspekte der Modellierung am Beispiel der Populationsdynamik	3
1.3	Populationsmodell mit beschränkten Ressourcen	9
1.4	Dimensionsanalyse und Skalierung	12
1.5	Asymptotische Entwicklung	16
1.6	Anwendungen aus der Strömungsmechanik	25
1.7	Literaturhinweise	30
1.8	Aufgaben	30
2	Lineare Gleichungssysteme	35
2.1	Elektrische Netzwerke	35
2.2	Stabwerke	46
2.3	Optimierung mit Nebenbedingungen	59
2.4	Literaturhinweise	63
2.5	Aufgaben	63
3	Grundzüge der Thermodynamik	71
3.1	Das Modell eines idealen Gases, die Maxwell–Boltzmann– Verteilung	72
3.2	Thermodynamische Systeme, das thermodynamische Gleichgewicht	76
3.3	Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	77

3.4	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, die Entropie	81
3.5	Thermodynamische Potentiale	92
3.6	Die Legendre–Transformation	94
3.7	Der Kalkül der Differentialformen	95
3.8	Thermodynamik bei Mischungen, das chemische Potential	98
3.9	Chemische Reaktionen in Mehrspeziessystemen	105
3.10	Gleichgewichtspunkte chemischer Reaktionen	110
3.11	Kinetische Reaktionen	115
3.12	Literaturhinweise	118
3.13	Aufgaben	118
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	127
4.1	Eindimensionale Schwingungen	127
4.2	Lagrangesche und Hamiltonsche Formulierung der Mechanik . .	136
4.3	Beispiele aus der Populationsdynamik	147
4.4	Qualitative Analysis, Phasenportraits	149
4.5	Prinzip der linearisierten Stabilität	154
4.6	Stabilität linearer Systeme	157
4.7	Variationsprobleme für Funktionen einer Variablen	161
4.8	Optimale Steuerung gewöhnlicher Differentialgleichungen	177
4.9	Literaturhinweise	183
4.10	Aufgaben	184
5	Kontinuumsmechanik	191
5.1	Einleitung	191
5.2	Teilchenmechanik	194
5.3	Von der Teilchenmechanik zum kontinuierlichen Medium	198
5.4	Kinematik	201
5.5	Erhaltungssätze	207
5.6	Konstitutive Gesetze	217
5.7	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der Kontinuumsmechanik	229
5.8	Beobachterunabhängigkeit	238
5.9	Konstitutive Theorie für viskose Flüssigkeiten	244

5.10	Modellierung elastischer Feststoffe	248
5.11	Elektromagnetismus	265
5.12	Dispersion	284
5.13	Literaturhinweise	285
5.14	Aufgaben	285
6	Partielle Differentialgleichungen	301
6.1	Elliptische Gleichungen	301
6.1.1	Variationsrechnung	302
6.1.2	Die Fundamentallösung	312
6.1.3	Mittelwertsatz und Maximumprinzip	315
6.1.4	Ebene Potentialströmungen, die Methode der komplexen Variablen	317
6.1.5	Die Stokes-Gleichungen	322
6.1.6	Homogenisierung	325
6.1.7	Optimale Steuerung elliptischer Differentialgleichungen .	329
6.1.8	Parameteridentifizierung und inverse Probleme	333
6.1.9	Lineare Elastizitätstheorie	337
6.2	Parabolische Gleichungen	340
6.2.1	Eindeutigkeit von Lösungen, die Energiemethode	342
6.2.2	Verhalten für große Zeiten	344
6.2.3	Separation der Variablen und Eigenfunktionen	348
6.2.4	Das Maximumprinzip	350
6.2.5	Die Fundamentallösung	352
6.2.6	Diffusionszeiten	355
6.2.7	Invariante Transformationen	356
6.2.8	Allgemeine Anfangswerte	357
6.2.9	Brownsche Bewegung	358
6.2.10	Laufende Wellen - „Travelling Waves“	361
6.2.11	Reaktions-Diffusions-Gleichung und Laufende Wellen . .	363
6.2.12	Turing-Instabilität und Musterbildung	369
6.2.13	Cahn-Hilliard-Gleichung und Musterbildung	377
6.3	Hyperbolische Erhaltungsgleichungen	380
6.4	Die Wellengleichung	389

6.5	Die Navier–Stokes–Gleichungen	396
6.6	Grenzschichten	401
6.7	Literaturhinweise	416
6.8	Aufgaben	416
7	Probleme mit freiem Rand	423
7.1	Hindernisprobleme und Kontaktprobleme	424
7.2	Freie Ränder in porösen Medien	431
7.3	Das Stefan–Problem	442
7.4	Entropieungleichung für das Stefan–Problem	449
7.5	Unterkühlte Flüssigkeiten	451
7.6	Gibbs–Thomson–Effekt	452
7.7	Mullins–Sekerka–Instabilität	454
7.8	A priori Abschätzungen für das Stefan–Problem	457
7.9	Die Phasenfeldgleichungen	460
7.10	Freie Oberflächen in der Strömungsmechanik	467
7.11	Dünne Filme und Lubrikationsapproximation	470
7.12	Literaturhinweise	474
7.13	Aufgaben	474
A	Funktionenräume	483
B	Krümmung von Hyperflächen	487
	Literaturverzeichnis	493
	Sachverzeichnis	499