

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen der Maßtheorie</b>	1
1.1	Mengensysteme	1
1.2	Mengenfunktionen	12
1.3	Fortsetzung von Maßen	18
1.4	Messbare Abbildungen	34
1.5	Zufallsvariablen	43
<b>2</b>	<b>Unabhängigkeit</b>	49
2.1	Unabhängigkeit von Ereignissen	49
2.2	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	56
2.3	Kolmogorov'sches 0-1 Gesetz	63
2.4	Beispiel: Perkolation	66
<b>3</b>	<b>Erzeugendenfunktion</b>	79
3.1	Definition und Beispiele	79
3.2	Poisson-Approximation	82
3.3	Verzweigungsprozesse	84
<b>4</b>	<b>Das Integral</b>	87
4.1	Konstruktion und einfache Eigenschaften	87
4.2	Monotone Konvergenz und Lemma von Fatou	95
4.3	Lebesgue-Integral versus Riemann-Integral	98
<b>5</b>	<b>Momente und Gesetze der Großen Zahl</b>	103
5.1	Momente	103
5.2	Schwaches Gesetz der Großen Zahl	110

5.3	Starkes Gesetz der Großen Zahl	113
5.4	Konvergenzrate im starken GGZ	121
5.5	Der Poissonprozess	124
<b>6</b>	<b>Konvergenzsätze</b>	131
6.1	Fast-überall- und stochastische Konvergenz	131
6.2	Gleichgradige Integrierbarkeit	136
6.3	Vertauschung von Integral und Ableitung	143
<b>7</b>	<b><math>L^p</math>-Räume und Satz von Radon-Nikodym</b>	145
7.1	Definitionen	145
7.2	Ungleichungen und Satz von Fischer-Riesz	147
7.3	Hilberträume	153
7.4	Lebesgue'scher Zerlegungssatz	156
7.5	Ergänzung: Signierte Maße	160
7.6	Ergänzung: Dualräume	167
<b>8</b>	<b>Bedingte Erwartungen</b>	171
8.1	Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten	171
8.2	Bedingte Erwartungen	175
8.3	Reguläre Version der bedingten Verteilung	182
<b>9</b>	<b>Martingale</b>	191
9.1	Prozesse, Filtrationen, Stopzeiten	191
9.2	Martingale	196
9.3	Diskretes stochastisches Integral	200
9.4	Diskreter Martingaldarstellungssatz und CRR Modell	202
<b>10</b>	<b>Optional Sampling Sätze</b>	207
10.1	Doob-Zerlegung und quadratische Variation	207
10.2	Optional Sampling und Optional Stopping	211
10.3	Gleichgradige Integrierbarkeit und Optional Sampling	215
<b>11</b>	<b>Martingalkonvergenzsätze und Anwendungen</b>	219

11.1	Die Doob'sche Ungleichung	219
11.2	Martingalkonvergenzsätze	221
11.3	Beispiel: Verzweigungsprozess	230
<b>12</b>	<b>Rückwärtsmartingale und Austauschbarkeit</b>	<b>233</b>
12.1	Austauschbare Familien von Zufallsvariablen	233
12.2	Rückwärtsmartingale	238
12.3	Satz von de Finetti	240
<b>13</b>	<b>Konvergenz von Maßen</b>	<b>245</b>
13.1	Wiederholung Topologie	245
13.2	Schwache und vage Konvergenz	252
13.3	Der Satz von Prohorov	260
13.4	Anwendung: Satz von de Finetti – anders angeschaut	269
<b>14</b>	<b>W-Maße auf Produkträumen</b>	<b>273</b>
14.1	Produkträume	274
14.2	Endliche Produkte und Übergangskerne	277
14.3	Satz von Ionescu-Tulcea und Projektive Familien	286
14.4	Markov'sche Halbgruppen	291
<b>15</b>	<b>Charakteristische Funktion und Zentraler Grenzwertsatz</b>	<b>297</b>
15.1	Trennende Funktionenklassen	297
15.2	Charakteristische Funktionen: Beispiele	304
15.3	Der Lévy'sche Stetigkeitssatz	310
15.4	Charakteristische Funktion und Momente	315
15.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	321
15.6	Mehrdimensionaler Zentraler Grenzwertsatz	329
<b>16</b>	<b>Unbegrenzt teilbare Verteilungen</b>	<b>331</b>
16.1	Die Lévy-Khinchin Formel	331
16.2	Stabile Verteilungen	343
<b>17</b>	<b>Markovketten</b>	<b>349</b>

17.1	Begriffsbildung und Konstruktion	349
17.2	Diskrete Markovketten, Beispiele	356
17.3	Diskrete Markovprozesse in stetiger Zeit	360
17.4	Diskrete Markovketten, Rekurrenz und Transienz	365
17.5	Anwendung: Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten	369
17.6	Invariante Verteilungen	376
<b>18</b>	<b>Konvergenz von Markovketten</b>	<b>383</b>
18.1	Periodizität von Markovketten	383
18.2	Kopplung und Konvergenzsatz	387
18.3	Markovketten Monte Carlo Methode	394
18.4	Konvergenzgeschwindigkeit	401
<b>19</b>	<b>Markovketten und elektrische Netzwerke</b>	<b>407</b>
19.1	Harmonische Funktionen	407
19.2	Reversible Markovketten	411
19.3	Endliche Elektrische Netzwerke	412
19.4	Rekurrenz und Transienz	418
19.5	Netzwerkreduktion	424
19.6	Irrfahrt in zufälliger Umgebung	431
<b>20</b>	<b>Ergodentheorie</b>	<b>435</b>
20.1	Begriffsbildung	435
20.2	Ergodensätze	439
20.3	Beispiele	441
20.4	Anwendung: Rekurrenz von Irrfahrten	443
20.5	Mischung	446
<b>21</b>	<b>Die Brown'sche Bewegung</b>	<b>451</b>
21.1	Stetige Modifikationen	451
21.2	Konstruktion und Pfadigenschaften	458
21.3	Starke Markoveigenschaft	463
21.4	Ergänzung: Feller Prozesse	466

21.5	Konstruktion durch $L^2$ -Approximation	469
21.6	Der Raum $C([0, \infty))$	473
21.7	Konvergenz von W-Maßen auf $C([0, \infty))$	475
21.8	Satz von Donsker	478
21.9	Pfadweise Konvergenz von Verzweigungsprozessen*	482
21.10	Quadratische Variation und lokale Martingale	488
<b>22</b>	<b>Gesetz vom iterierten Logarithmus</b>	<b>499</b>
22.1	Iterierter Logarithmus für die Brown'sche Bewegung	499
22.2	Skorohod'scher Einbettungssatz	502
22.3	Satz von Hartman-Wintner	507
<b>23</b>	<b>Große Abweichungen</b>	<b>509</b>
23.1	Satz von Cramér	510
23.2	Prinzip der großen Abweichungen	514
23.3	Satz von Sanov	518
23.4	Varadhan'sches Lemma und Freie Energie	522
<b>24</b>	<b>Der Poisson'sche Punktprozess</b>	<b>529</b>
24.1	Zufällige Maße	529
24.2	Eigenschaften des Poisson'schen Punktprozesses	533
24.3	Die Poisson-Dirichlet-Verteilung*	539
<b>25</b>	<b>Das Itô-Integral</b>	<b>547</b>
25.1	Das Itô-Integral bezüglich der Brown'schen Bewegung	547
25.2	Itô-Integral bezüglich Diffusionen	555
25.3	Die Itô-Formel	558
25.4	Dirichlet-Problem und Brown'sche Bewegung	566
25.5	Rekurrenz und Transienz der Brown'schen Bewegung	568
<b>26</b>	<b>Stochastische Differentialgleichungen</b>	<b>573</b>
26.1	Starke Lösungen	573
26.2	Schwache Lösungen und Martingalproblem	582
26.3	Eindeutigkeit schwacher Lösungen via Dualität	589

<b>Literatur</b> .....	597
<b>Notation</b> .....	607
<b>Glossar englischer Ausdrücke</b> .....	611
<b>Namensregister</b> .....	613
<b>Sachregister</b> .....	617