Unverkäufliche Leseprobe aus:

Dagmar Bruß
Quanteninformation

Quanteninformation

Grundriss

Vertiefungen

Anhang

Grundriss

1 WAS IST INFORMATION?

Der Begriff »Information« – der lateinische Wortstamm *informatio* bedeutet »Nachricht, Auskunft« – ist in unserem Alltagsleben allgegenwärtig und gehört, im Gegensatz zu vielen anderen Fachausdrücken der Physik, zum allgemeinen Wortschatz. In der heutigen »Informationsgesellschaft« werden tagtäglich riesige Datenmengen verschiedenster Art verarbeitet und vom jeweiligen Sender zum jeweiligen Empfänger übermittelt.

Ein zentrales Thema in der klassischen Informationstheorie ist das Lösen von mathematischen Problemen mittels Algorithmen (methodische Rechenverfahren); ein weiteres die sichere Übermittlung geheimer Daten (etwa Kreditkartennummern im Internet), d. h. die Verschlüsselung, Übertragung und Entschlüsselung einer so genannten »Nachricht«. Eine Nachricht ist eine Kette von so genannten »Buchstaben«, die wiederum aus einem »Alphabet« gewählt werden. Dies kommt Ihnen sicher selbstverständlich vor, denn Sie lesen ja gerade eine solche Folge von Buchstaben aus dem deutschen Alphabet. Die in der Botschaft enthaltene Information hängt dabei nicht von der Wahl des Alphabets ab: Es wäre beispielsweise denkbar, denselben Text (der daher auch denselben Informationsgehalt trägt) mit Hilfe von griechischen Buchstaben zu schreiben, also α statt a und β statt b und so fort. Die Wahl des Alphabets hängt natürlich von der Zielsetzung und von der geplanten Anwendung ab.

Die Verarbeitung, Speicherung und Übertragung von Information beruht heutzutage hauptsächlich auf dem Computer. Das Alphabet, das für die Anwendung mit dem Computer sinnvoll ist, und daher im Folgenden benutzt werden wird, ist das einfachste denkbare. Es besteht nur aus den zwei Zeichen 0 und 1. Ein solches *binäres* Alphabet lässt sich physikalisch einfach verwirklichen, z. B. durch eine hohe

bzw. niedrige Spannung. Jedes andere Alphabet kann man durch eine einfache Vorschrift in das binäre Alphabet übersetzen: Jedem Buchstaben des Alphabets wird eine Zahl im Dezimalsystem zugeordnet, also dem ersten eine 1, dem zweiten eine 2 usw. Diese Zahl wird vom Dezimalsystem ins Binärsystem übersetzt – da man im Binärsystem nur die beiden Ziffern 0 und 1 zur Verfügung hat, zählt man dort wie folgt: auf »001« folgt »010«, darauf »011«, danach »100« und so fort. Der Buchstabe »D« ist beispielsweise der 4. Buchstabe in unserem Alphabet, und die »4« des Dezimalsystems wird im Binärsystem zu »100«. – Im Folgenden wird, wenn nicht anders angegeben, stets von binären Alphabeten die Rede sein.

Die Einheit der klassischen Information wird auch als »Bit« (Abkürzung für *binary digit*) bezeichnet: Hat man einen elementaren Informationsträger zur Verfügung, z. B. eine Kiste, die einen Ball enthält (entspricht 1) oder nicht (entspricht 0), so kann man damit ein Bit an Information übertragen. Sprachlich etwas ungenau wird oft keine Unterscheidung zwischen dem Informationsgehalt und dem Binärzeichen selbst (dem Träger der Information) gemacht, da beide als Bit bezeichnet werden.

Der Empfänger erhält die Information, indem er eine Messung am Informationsträger durchführt: im Fall der Kiste öffnet er sie und sieht nach, ob ein Ball darin ist (Ereignis »1«) oder nicht (Ereignis »0«). Das Auftreten der Ereignisse »0« bzw. »1« geschehe dabei mit den Wahrscheinlichkeiten p_0 bzw. p_1, wobei $p_0 + p_1 = 1$. Man kann Information auch als Mangel an (Vor-)Wissen interpretieren: Ist z. B. $p_0 = 1$, so ist klar, dass in jedem Fall die Kiste leer ist. Man lernt also nichts dazu, wenn man sie öffnet. Ist das Unwissen maximal, d. h. $p_0 = p_1 = 1/2$, so gewinnt man am meisten Information bei der Messung. Claude Shannon entwickelte die Theorie der mathematischen Quantifizierung des intuitiven Konzepts der Information und zeigte die Äquivalenz zwischen Information und Entropie.

1.1 Information ist physikalisch

Der Duden gibt folgende Definition für Information: »als räumliche oder zeitliche Folge physikalischer Signale, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten oder Häufigkeiten auftreten, sich zusammensetzende Mitteilung, die beim Empfänger ein bestimmtes (Denk)verhalten bewirkt.« Wesentliche Beachtung verdient hier das Wort »physikalisch«. Information ist nicht nur ein abstrakter Begriff: Bei der Übertragung von Information erfolgt immer die Umsetzung einer Nachricht in ein physikalisches Medium. Beispielsweise benutzen Winnetou und Old Shatterhand u. a. optische Mittel (Rauch- oder Feuerzeichen) zur Informationsübertragung. Wenn man eine Nachricht spricht, so wird sie in akustische Wellen umgewandelt, die wiederum beim Zuhörer empfangen und über Ohr und Gehirn in ein Signal verwandelt und interpretiert werden. Bei der digitalen Informationsverarbeitung in einem Computer werden 0 und 1 durch eine hohe bzw. niedrige Spannung kodiert. Diese drei Beispiele betreffen drei wichtige Teilbereiche der Physik: Optik, Akustik und Elektrodynamik. Jede der beschriebenen Methoden hat Vor- und Nachteile, die durch die physikalische Implementation bedingt sind: z. B. ist die optische Informationsübertragung nur dann möglich, wenn kein Hindernis im Weg steht, die akustische nur dann, wenn nicht zu viel Hintergrundrauschen vorhanden ist.

Die bedeutsamste klassische Methode der Informationsverarbeitung ist sicherlich der Computer. Hier hat die Weiterentwicklung der Halbleitertechnologie zu immer kleineren Bauteilen und immer höheren Geschwindigkeiten geführt. In absehbarer Zeit wird man durch die Miniaturisierung der Bauteile an die Quantengrenze stoßen. Welche Neuerungen ergeben sich, wenn die Gesetze der Quantenphysik eine dominante Rolle bei der Informationsverarbeitung spielen?

Die weitreichenden Konsequenzen und vielfältigen neuen Möglichkeiten, die sich aus der Symbiose von klassischer Informations-

theorie und Quantenphysik – der Quanteninformation – ergeben, werden erst seit den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts intensiv erforscht. Da es sich um einen jungen Forschungsbereich handelt, der sich weiterhin rasant entwickelt, kann dieses Buch nur auf die grundlegenden Prinzipien der Quanteninformation eingehen und eine Momentaufnahme des derzeitigen Wissensstands liefern.

Bevor wir dazu kommen, jedoch zunächst eine Einführung in wichtige Konzepte der klassischen Informationstheorie.

1.2 Die Turingmaschine

Alan Turing entwickelte 1936 ein abstraktes Konzept eines Computers, die so genannte Turingmaschine. Sie kann alle Funktionen berechnen, die berechenbar sind. Die Elemente, aus denen sie besteht, sind die folgenden (siehe Abb. 1):

1. Eine endliche Menge von internen Zuständen der Maschine (einschließlich eines Anfangs- und eines Endzustands).
2. Ein unendlich langes Band, das in Segmente unterteilt ist, die »0« oder »1« oder »leer« enthalten. Der Startpunkt ist vorgegeben.
3. Ein Schreib- und Lesekopf, der jeweils auf ein Segment des Bandes zeigt.
4. Ein Programm aus endlich vielen Zeilen.

Eine Programmzeile gibt eine Vorschrift für einen gegebenen internen Zustand der Maschine und einen gegebenen Eintrag auf dem Band an. Diese Vorschrift besagt, ob der interne Zustand der Maschine geändert wird oder nicht, ob der Eintrag auf dem Band überschrieben wird oder nicht, und ob sich der Schreib- und Lesekopf danach einen Schritt nach rechts oder links bewegt.

Ein einfaches Beispiel für ein solches Programm ist das Auffinden der Parität einer gegebenen Folge von Nullen und Einsen. (Bei einer

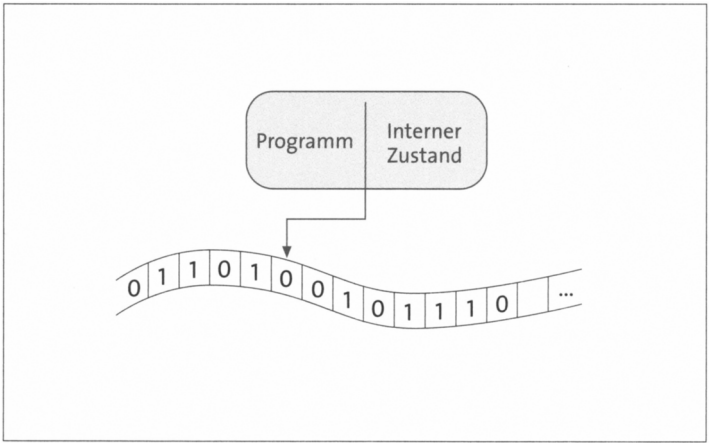


Abb. 1: Die Elemente einer Turingmaschine.

geraden Anzahl von Einsen spricht man von gerader, ansonsten von ungerader Parität.) Hierzu sei der interne Zustand der Maschine anfänglich 0. Der Lese- und Schreibkopf liest den jeweiligen Eintrag auf dem Band. Ist der Eintrag 1, so wird der interne Zustand der Maschine geändert, d. h. wenn er 0 war, wird er zu 1 und umgekehrt. Ist der Eintrag auf dem Band aber gleich 0, so bleibt der interne Zustand ungeändert. Danach rückt der Kopf einen Schritt nach rechts. Das Auftreten eines leeren Segments des Bandes bedeutet das Anhalten der Turingmaschine: Ist nun ihr interner Zustand 0, so hat die getestete Folge von Nullen und Einsen gerade, ansonsten ungerade Parität.

Über dieses abstrakte Konzept eines Computers kann die Komplexität von mathematischen Problemen definiert werden, wie im nächsten Kapitel erläutert. Das Modell der klassischen Turingmaschine kann ferner auf das Modell eines Computers erweitert werden, der auf quantenphysikalischen Prinzipien beruht – die Quanten-Turingmaschine.

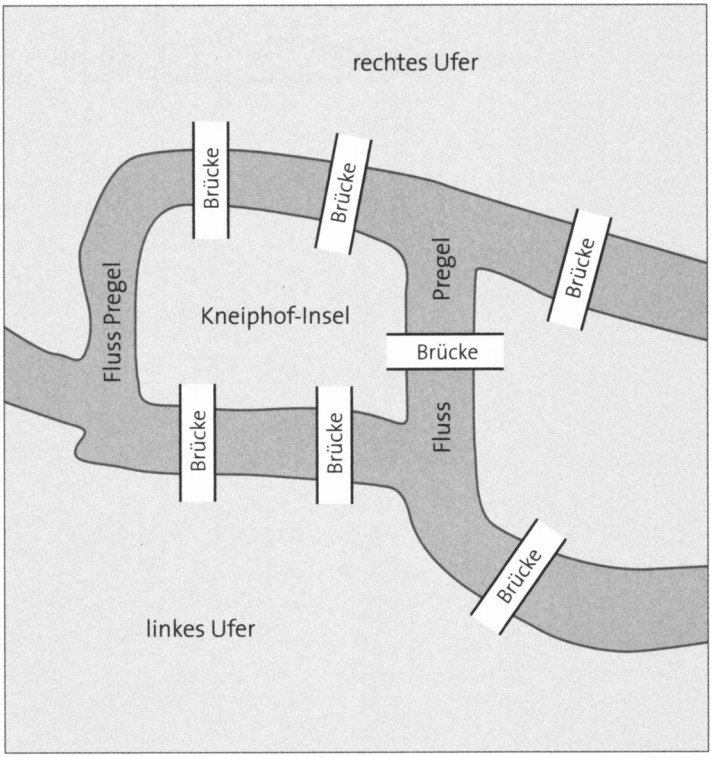


Abb. 2: Die Stadt Königsberg im Jahr 1736.

1.3 Über die Komplexität von Problemen

Wie schwierig ist es, ein gegebenes mathematisches Problem zu lösen? Mit dieser Fragestellung beschäftigt sich die Komplexitätstheorie. Sie klassifiziert Rechenprobleme danach, wie die von einer Turingmaschine benötigte Rechenzeit mit der »Größe« der betreffenden Aufgabe anwächst. Die Größe ist dabei z. B. die Zahl der Bits, die das Problem definieren.

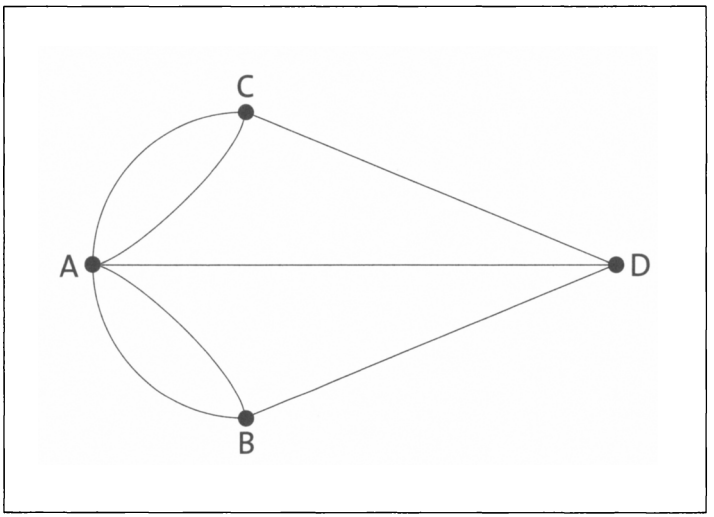


Abb. 3: Der Graph zum Königsberger Brückenproblem.

Sehen wir uns dazu Beispiele so genannter Entscheidungsprobleme an, d. h. Probleme, deren Antwort »ja« oder »nein« ist. Betrachten wir den Stadtplan von Königsberg in Abb. 2. In Königsberg war es zu Zeiten Eulers ein beliebtes Rätsel, ob es einen Rundgang durch die Stadt gibt, so dass man jede der sieben Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt – das so genannte Königsberger Brückenproblem.

Euler abstrahierte 1736 dieses Problem in einem Graphen, siehe Abb. 3, und begründete so die Graphentheorie. Das Festland und die Inseln sind hier als Punkte (so genannte Knoten) dargestellt und die Brücken als Verbindungslinien (Kanten). Euler bewies, dass ein Graph genau dann einen oben beschriebenen Rundgang (Euler'schen Kreis) enthält, wenn von jedem Knoten eine gerade Anzahl von Kanten ausgeht. In Königsberg gab es also keinen Euler-Kreis: das Königsberger Brückenproblem hat keine Lösung.

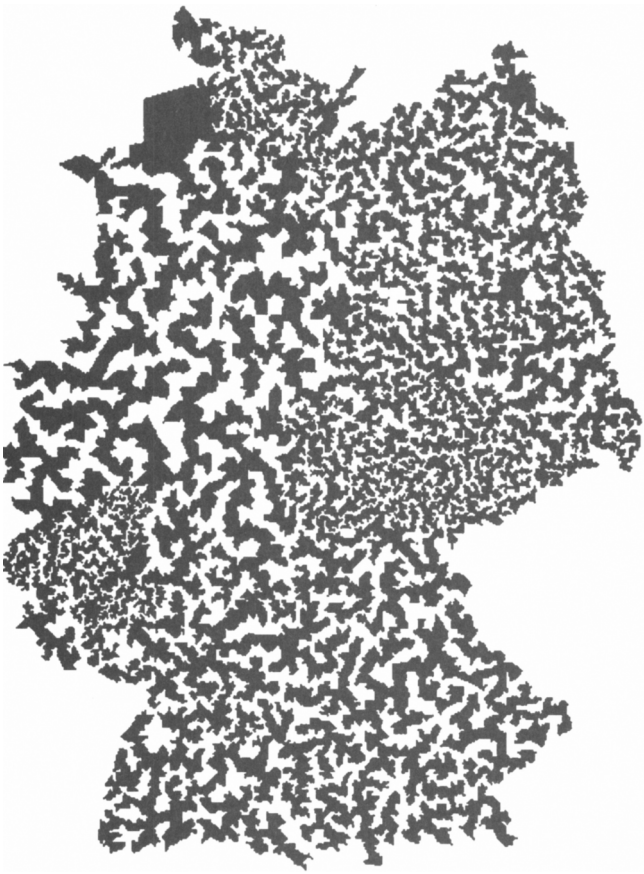
Durch diese mathematische Einsicht sind auch analoge Probleme mit sehr viel mehr Knoten und Kanten leicht zu lösen: Für jeden Knoten zählt man seine Kanten und stellt fest, ob diese Zahl gerade ist. Die Rechendauer für die Lösung des Problems »Euler-Kreis« wächst wie ein Polynom mit der Zahl N der Knoten, genauer gesagt wie N^2. Daher bezeichnet man es als zur Klasse P (für »*polynomial*«) gehörig. Die Probleme der Klasse P sind einfach zu lösen.

Sehen wir uns nun eine nur leicht veränderte Aufgabe an, die Frage nach dem so genannten Hamilton'schen Kreis: Enthält ein Graph einen geschlossenen Pfad, der jeden Knoten genau einmal berührt (abgesehen von dem ersten Knoten, der ja am Ende des Rundgangs wieder erreicht wird)? Für den Königsberger Graph ist diese Frage einfach mit »Ja« zu beantworten. Obwohl diese Fragestellung derjenigen nach dem Euler-Kreis verblüffend ähnlich sieht, kennt man für den Hamilton-Kreis jedoch bis heute keine einfache, d. h. polynomiale Lösungsvorschrift. Das Problem Hamilton-Kreis liegt nicht in der Komplexitätsklasse P, sondern in der so genannten Klasse NP. Dies sind schwierig zu lösende Probleme, da die Rechendauer, die eine Turingmaschine benötigt, *exponentiell* mit der Größe des Problems anwächst.

Der Hamilton-Kreis gehört sogar zu den schwierigsten der NP-Probleme, nämlich zu den so genannten NP-schweren oder NP-vollständigen Problemen. Auf diese lassen sich *alle* anderen NP-Probleme zurückführen. Hätte man also eine neue Lösung eines NP-vollständigen Problems gefunden, die nur polynomiale Komplexität hat, so hätte man damit $P = NP$ gezeigt. Die Frage $P \stackrel{?}{=} NP$ ist eine der wichtigsten offenen Fragen der klassischen Informationstheorie.

Zu den NP-vollständigen Problemen gehört auch das bekannte Problem des Handelsreisenden: Dieser muss N auf einer Karte vorge-

Abb. 4: Die optimale Lösung des Handelsreisenden-Problems für 15112 Städte in Deutschland, nach Applegate, Bixby, Chvátal und Cook.



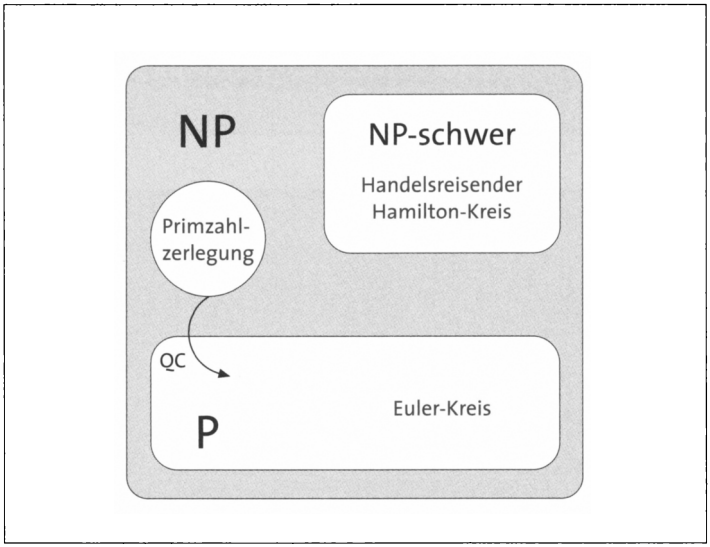


Abb. 5: Komplexitätsklassen

gebene Städte je einmal besuchen. Die Frage lautet: Gibt es eine Route, die kürzer als eine festgelegte Distanz *x* ist? Die Aufgabe, die kürzeste Rundreise zu finden, spielt für etliche Anwendungen im Alltag eine bedeutende Rolle – außer für die Fahrtroutenoptimierung auch z. B. bei der Lagerhaltung, bei der Leiterplattenfertigung in der Elektrotechnik oder bei Verdrahtungsproblemen in Computersystemen.

In Abb. 4 ist die kürzeste Route zwischen 15 112 Städten angegeben – im Jahr 2001 wurde bewiesen, dass dies die optimale Lösung ist. Da sich auf der kürzesten Route der Weg nicht selbst kreuzen darf (zwei sich kreuzende Strecken könnte man durch zwei sich nicht kreuzende ersetzen und auf diese Weise den Weg verkürzen), kann die Fläche der Bundesrepublik in eine »Innenseite« und eine »Außenseite« der Route eingefärbt werden, wie in Abb. 4.