

SCHÄFFER
POESCHEL

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	1
1 Einleitung	3
2 Die grundlegenden Risikofaktoren der Finanzmärkte	7
2.1 Zinsen	7
2.1.1 Day Count Conventions	8
2.1.2 Business Day Conventions	10
2.1.3 Diskontfaktoren	11
2.1.4 Zinsmethoden	12
2.1.5 Spot Rates	17
2.1.6 Forward Rates	17
2.2 Kurse	19
2.3 Ein anschauliches Modell für die Risikofaktoren	20
2.3.1 Der Random Walk als Grundlage vieler Preis- und Risikomodelle	20
2.3.2 Risikofaktoren als Random Walks	23
2.4 Ito-Prozesse und stochastische Analysis	28
2.4.1 Der allgemeine Diffusionsprozess	28
2.4.2 Ito's Lemma	29
2.4.3 Übergangswahrscheinlichkeiten, Forward- und Backward Equation	34
2.4.4 Forward und Backward Equation in der Black-Scholes Welt . . .	41
3 Finanzinstrumente: Eine Systematik von Derivaten und Underlyings	43
3.1 Kassageschäfte	44
3.1.1 Geldmarktpapiere	44
3.1.2 Kapitalmarktpapiere	48
3.1.3 Swaps	50
3.2 Termingeschäfte	51
3.3 Optionen	53
II Methoden	57
4 Überblick über die Voraussetzungen	59

5	Barwerte, Renditen und traditionelle Risikokennzahlen	63
5.1	Barwert und Yield To Maturity	63
5.2	Effektivzins und Net Present Value	65
5.3	Stückzinsen, Restschuld und Par Rates	68
5.4	Traditionelle Kennzahlen von Zinsinstrumenten	70
5.4.1	Mittlere Laufzeit und Macaulay Duration	70
5.4.2	Modified Duration und Convexity	71
5.4.3	Addition traditioneller Sensitivitäten	75
6	Arbitrage	77
6.1	Termingeschäfte	77
6.1.1	Terminkurs und Cash And Carry-Arbitrage	77
6.1.2	Der stochastische Prozess für den Terminkurs	79
6.1.3	Forward-Positionen	80
6.1.4	Future-Positionen und Basisrisiko	80
6.2	Optionen	81
6.2.1	Ober- und Untergrenzen für Optionspreise	81
6.2.2	Vorzeitige Ausübung amerikanischer Optionen	82
6.2.3	Beziehungen zwischen Put und Call	83
7	Black-Scholes Differentialgleichungen	85
7.1	Die Black-Scholes DGL aus Arbitrageüberlegungen	86
7.1.1	Die Differentialgleichung für Europäische Optionen	86
7.1.2	Die Differentialungleichung für Amerikanische Optionen	88
7.1.3	Ein erster Kontakt mit der risikoneutralen Welt	90
7.2	Die Black-Scholes DGL und die Backward Equation	91
7.2.1	Ein zweiter Kontakt mit der risikoneutralen Welt	93
7.3	Der Zusammenhang zur Diffusionsgleichung	94
8	Integralformen und analytische Lösungen in der Black-Scholes Welt	99
8.1	Optionspreise als Lösungen der Diffusionsgleichung	99
8.2	Optionspreise und Übergangswahrscheinlichkeit	101
8.3	Black-Scholes Optionspreise für verschiedene Underlyings	104
8.3.1	Optionen auf den Spotkurs	104
8.3.2	Optionen auf den Terminkurs	104
8.3.3	Optionen auf Zinsen	107
9	Numerische Lösung von Differentialgleichungen mittels Finiten Differenzen	109
9.1	Diskretisierung der Black-Scholes Gleichung	110
9.1.1	Die explizite Methode	111
9.1.2	Die implizite Methode	111
9.1.3	Die verallgemeinerte Crank-Nicolson Methode	111
9.1.4	Symmetrische finite Differenzen für das Underlying	113
9.2	Differenzen Schemata	115
9.2.1	Anfangswertbedingungen	118

9.2.2	Dirichletsche Randbedingungen	119
9.2.3	Neumannsche Randbedingungen	123
9.2.4	Nicht explizit vorgegebene Randbedingungen	127
9.2.5	Freie Randbedingungen für amerikanische Optionen	130
9.3	Konvergenzkriterien	135
9.3.1	Verbesserung der Konvergenzeigenschaften	137
9.4	Diskrete Dividenden	139
9.5	Beispiel	140
10	Binomial- und Trinomialbäume	145
10.1	Allgemeine Bäume	145
10.1.1	Das Underlying und das replizierende Portfolio	145
10.1.2	Das Derivat	146
10.1.3	Termingeschäfte	148
10.2	Rekombinierende Bäume	148
10.2.1	Das Underlying	148
10.2.2	Die Binomialverteilung für Europäische Derivate	149
10.2.3	Ein dritter Kontakt mit der risikoneutralen Welt	152
10.3	Die Verbindung zwischen Random Walk und Binomial-Parameter	155
10.4	Das Binomialmodell für unendlich kleine Schritte	157
10.4.1	Die Bestandteile der Black-Scholes Optionspreisformeln	159
10.5	Trinomialbäume	159
10.5.1	Der Trinomialbaum als verbesserter Binomialbaum	162
10.5.2	Zusammenhang mit der expliziten Methode finiter Differenzen	163
11	Monte-Carlo Simulationen	165
11.1	Ein einfaches Beispiel: Der Flächeninhalt eines Kreises	167
11.2	Die allgemeine Vorgehensweise der Monte-Carlo Simulation	170
11.3	Monte-Carlo Simulationen von Risikofaktoren	171
11.3.1	Simulation der zeitlichen Entwicklung <i>eines</i> Risikofaktors	171
11.3.2	Simulation <i>mehrerer</i> miteinander korrelierter Risikofaktoren	174
11.4	Preisberechnung	177
12	Hedging	179
12.1	Replizierende Portfolios als synthetische Derivate	179
12.2	Hedging von Derivaten mit Kassageschäften	180
12.2.1	Forwards und Futures als Derivate	181
12.3	Hedging von Derivaten mit Termingeschäften	182
12.3.1	Hedging mit Forwards	182
12.3.2	Hedging mit Futures	184
12.3.3	Die Differentialgleichung für Derivate auf Futures	185
12.4	Hedge-Ratios für beliebige Kombinationen von Finanzinstrumenten	187
12.5	„Griechisches“ Risikomanagement mit Sensitivitäten	189
12.5.1	Sensitivitäten und die Wertänderung eines Portfolios	189
12.5.2	Omega und Beta	192
12.5.3	Addition von Sensitivitäten bzgl. verschiedener Underlyings	194

12.6	Berechnung der griechischen Risikokennzahlen	195
12.6.1	Sensitivitäten im Binomialmodell	195
12.6.2	Sensitivitäten im Black-Scholes Modell	197
12.6.3	Sensitivitäten mittels der Finite-Differenzen Methode	198
12.6.4	Sensitivitäten mittels Monte-Carlo Simulationen	198
13	Martingale und Numeraire	199
13.1	Die Martingaleigenschaft	199
13.2	Die Normierung (Numeraire)	201
13.3	Selbstfinanzierende Portfoliostrategien	205
13.4	Die Verallgemeinerung auf stetige Zeit	207
13.5	Die Drift	215
13.6	Der Marktpreis des Risikos	218
13.7	Handelbare Underlyings	220
13.8	Anwendung auf die Black-Scholes Welt	221
14	Zinsen und Zinsstrukturmodelle	225
14.1	Instantane Spot Rate und Instantane Forward Rate	226
14.2	Die wichtigsten Normierungen	227
14.2.1	Das risikoneutrale Maß	228
14.2.2	Das Terminpreis-neutrale Maß	229
14.3	Der Spezialfall deterministischer Zinsen	230
14.4	Handelbare und nicht handelbare Größen	232
14.5	Convexity Adjustments	233
14.5.1	LIBOR In Arrears Swaps	236
14.5.2	Geldmarktfutures	238
14.6	Arbitragefreie Gittermodelle (Bäume)	240
14.6.1	Backward Induction	241
14.6.2	Forward Induction und Greens-Funktionen	244
14.7	Marktzinsen versus Instantane Zinsen	248
14.7.1	Arrow-Debreu Preise	249
14.7.2	Bewertung von Caplets mittels Arrow-Debreu Preisen	252
14.8	Explizite Spezifikation von Short Rate Modellen	254
14.8.1	Der Einfluss der Volatilität	255
14.8.2	Normal Models	256
14.8.3	Lognormal Models	259
14.9	Das Beispielprogramm TERMSTRUCTUREMODELS.XLS	261
14.9.1	Aufbau des Zinsbaumes und Optionsbewertung	261
14.9.2	Absolute und relative Volatilitäten	264
14.9.3	Kalibrierung der Volatilitäten	265
14.10	Monte-Carlo On The Tree	267
14.11	Die Drift bei Zinsstrukturmodellen	268
14.11.1	Heath-Jarrow-Morton Modelle	268
14.11.2	Short Rate Modelle	269
14.12	Short Rate Modelle in Diskreter Verzinsung	273
14.12.1	Normal Models	274

14.12.2 Lognormal Models	274
III Instrumente	277
15 Zinskassageschäfte	279
15.1 Zerobonds	279
15.1.1 Cash Flows und Barwert	279
15.1.2 Yield To Maturity und Par Rate	280
15.1.3 Sensitivitäten	280
15.2 Floater	281
15.2.1 Cash Flows und Barwert	281
15.2.2 Yield To Maturity, Par Rate und Sensitivitäten	282
15.3 Kuponbonds	283
15.3.1 Cash Flows und Barwert	283
15.3.2 Yield To Maturity	283
15.3.3 Par Rates	285
15.3.4 Sensitivitäten	287
15.4 Swaps	288
15.4.1 Cash Flows und Barwert	289
15.4.2 Yield To Maturity und Swap Rate	290
15.4.3 Sensitivitäten	292
15.5 Annuitätendarlehen	292
15.5.1 Cash Flows und Restschuld	293
15.5.2 Barwert	295
15.5.3 Yield To Maturity und Par Rates	297
15.5.4 Sensitivitäten	300
15.5.5 Bemerkungen zum Kreditrisiko	301
16 Zinstermingeschäfte	303
16.1 Forward Rate Agreements	303
16.2 Zinsfutures	304
16.2.1 Futures auf Zerobonds	304
16.2.2 Futures auf Kuponbonds	304
16.3 Forward Swaps	307
16.3.1 Barwert	308
16.3.2 Forward Swap Rates und Forward Yield To Maturity	309
16.4 Forward Bonds	312
16.4.1 Barwert	312
16.4.2 Forward Par Rate und Forward Yield To Maturity	313
17 Plain Vanilla-Optionen	315
17.1 Optionen auf Spot- und Terminkurse	316
17.1.1 Europäische Optionen	316
17.1.2 Amerikanische Optionen	317
17.2 Index-Optionen und -Futures	318

17.3	Devisen-Optionen und -Futures	319
17.3.1	Put-Call Äquivalenz bei Devisenoptionen	319
17.3.2	Devisentermingeschäfte und Swapsätze	320
17.4	Zinsoptionen	321
17.4.1	Optionen auf Bonds	321
17.4.2	Optionen auf Bond Futures	322
17.4.3	Caps und Floors	322
17.4.4	Swaptions	327
18	Exotische Optionen	335
18.1	Klassische und allgemeine Definition einer Option	335
18.2	Auszahlungsprofile für ausgewählte Exoten	335
18.2.1	Power-Optionen	336
18.2.2	Cliquet- und Coupe-Optionen	336
18.2.3	Look Back-Optionen	337
18.2.4	Asiatische Optionen	337
18.2.5	Rainbow- und Austausch-Optionen	337
18.2.6	Compound- und Bermuda-Optionen	338
18.3	Black-Scholes für Exoten	339
18.3.1	Pay Later-Optionen	339
18.3.2	Digitale Optionen	340
18.3.3	Barrier-Optionen	342
18.3.4	Ladder-Optionen	347
18.4	Bewertungsmöglichkeiten für Exoten	349
18.4.1	Monte-Carlo für europäische Exoten	349
18.4.2	Das Binomial-Modell für amerikanische Exoten	353
IV	Risiko	359
19	Grundlagen	361
19.1	Konfidenz, Quantil und Risiko	362
19.1.1	Andere Risikomaße	364
19.2	Der Value at Risk eines einzelnen Risikofaktors	365
19.3	Näherungen in der Verteilung der Risikofaktoren	370
19.4	Die Kovarianzmatrix	372
19.4.1	Renditen und Logarithmische Änderungen	374
19.4.2	Kovarianzmatrizen von Datenlieferanten	375
19.4.3	Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix	377
20	Die Varianz-Kovarianz Methode	383
20.1	Portfolios vs. Finanzinstrumente	385
20.2	Die Delta-Normal Methode	388
20.2.1	Der Value at Risk bzgl. eines einzelnen Risikofaktors	388
20.2.2	Der Value at Risk bzgl. mehrerer Risikofaktoren	389
20.3	Die Delta-Gamma Methode	392

20.3.1	Entkopplung der Risikofaktoren	393
20.3.2	Diagonalisierung der Gamma-Matrix	394
20.3.3	Die Verteilung der Portfolio-Wertveränderungen	398
20.3.4	Momente der Portfoliowertverteilung	400
20.3.5	Fourier-Transformation der Portfoliowertverteilung	408
20.3.6	Monte-Carlo Simulationen der Portfoliowertverteilung	411
21	Simulationsmethoden	413
21.1	Monte-Carlo Simulation	413
21.1.1	Die Risikofaktoren als korrelierte Random Walks	414
21.1.2	Structured Monte-Carlo	415
21.2	Historische Simulation	416
21.3	Crash- und Stress-Testing: Worst Case-Szenarien	418
22	Zinsrisiko und Cash Flows	421
22.1	Cash Flow Strukturen von Finanzinstrumenten	421
22.1.1	Kassageschäfte	422
22.1.2	Termingeschäfte	424
22.1.3	Optionen	425
22.2	Interpolationen und Cash Flow Mapping	433
22.2.1	Interpolationen	433
22.2.2	Risiko-basiertes Cash Flow Mapping	434
22.2.3	Duration-basiertes Cash Flow Mapping	437
23	Beispiel für eine VaR-Berechnung	439
23.1	Das Portfolio	439
23.2	Marktdaten	440
23.3	Cash Flow Mapping	441
23.4	Risikoberechnung	442
24	Backtesting: Überprüfen der verwendeten Methode	445
24.1	Profit Loss Berechnungen	445
24.2	Das Ampelkonzept der Aufsichtsbehörden	446
24.2.1	Anpassung des Value at Risk (gelbe Zone)	446
24.2.2	Kriterien zur Ablehnung eines Modells (rote Zone)	448
24.2.3	Die grüne Zone	450
24.2.4	Multiplikator und Add On	451
V	Portfolien	453
25	Klassisches Portfoliomanagement	455
25.1	Vom Risikomanagement zum Portfoliomanagement	456
25.1.1	Finanzinstrumente und Risikofaktoren	456
25.1.2	Portfoliorisiko und Volatilität	458
25.1.3	Risikobeitrag und Attribution	461

25.2	Portfolio Optimierung	463
25.2.1	Das Portfolio mit minimalem Risiko	463
25.2.2	Die Effizienzlinie	465
25.2.3	Die Sharpe Ratio und das optimale Portfolio	471
25.2.4	Die Kapitalmarktklinie	474
26	Attribute und ihre charakteristischen Portfolien	479
26.1	Allgemeine Eigenschaften Charakteristischer Portfolien	480
26.1.1	Relationen mit mehreren charakteristischen Portfolien	481
26.2	Der Investitionsgrad oder <i>Leverage</i>	483
26.3	Die Überschussrendite	483
26.4	Das optimale Portfolio	487
26.5	Die Effizienzlinie als Kombination charakteristischer Portfolien	489
27	Aktives Management und Benchmarking	495
27.1	Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)	495
27.2	Benchmarking gegenüber einem Index	497
27.2.1	Aktive Portfolieigenschaften	499
27.2.2	Residuale Portfolieigenschaften	500
27.3	Benchmark und Charakteristische Portfolien	501
27.3.1	Das voll investierte Minimalrisiko-Portfolio	502
27.3.2	Das charakteristische Portfolio zu Beta	503
27.3.3	Das charakteristische Portfolio zu Alpha	504
27.4	Relationen zwischen Sharpe Ratio und Information Ratio	508
27.4.1	Das Marktportfolio	508
27.4.2	Das charakteristische Portfolio der Überschussrendite	511
VI	Marktdaten	513
28	Zinsstrukturkurven	515
28.1	Bootstrapping	516
28.1.1	Die allgemeine Bootstrapping-Gleichung	516
28.1.2	Bootstrapping für gleich lange Kuponperioden	517
28.1.3	Klassisches Bootstrapping	521
28.2	Interpolationen	526
29	Volatilitäten	529
29.1	Implizite Volatilitäten	529
29.1.1	Smiles und Volatilitätsindizes	529
29.2	Lokale Volatilitätsflächen	531
29.2.1	Implizite Übergangswahrscheinlichkeiten	531
29.2.2	Implizite lokale Volatilitätsflächen	533
29.3	Volatilitätstransformationen	537
29.3.1	Transformation zwischen relativer und absoluter Volatilität	537
29.3.2	Addition von Volatilitäten	539

29.3.3	Transformation zwischen Yield- und Preis-Volatilität	540
29.3.4	Wahrungstransformationen von Volatilität und Korrelation	541
30	Marktparameter aus historischen Zeitreihen	551
30.1	Historische Mittelwerte als Schätzer für Erwartungswerte	551
30.2	Abschätzung statistischer Fehler	553
30.2.1	Fehler unkorrelierter Messungen	554
30.2.2	Fehler autokorrelierter Messungen	558
30.3	Rendite und Kovarianzschatzungen	561
30.3.1	Renditeschatzungen	561
30.3.2	Kovarianzschatzungen	565
31	Modellierung historischer Zeitreihen	567
31.1	Stationäre Zeitreihen und autoregressive Modelle	570
31.1.1	Der $AR(p)$ Prozess	570
31.1.2	Der univariate $GARCH(p, q)$ -Prozess	575
31.1.3	Generierung eines $GARCH$ -Prozesses	578
31.2	Kalibrierung von Zeitreihenmodellen	578
31.2.1	Parameterschätzung für den $AR(p)$ -Prozess	579
31.2.2	Parameterschätzung für den $GARCH(p, q)$ -Prozess	581
31.2.3	Der Simulated Annealing Algorithmus	583
32	Prognosen mit Zeitreihenmodellen	587
32.1	Prognosen mit dem Autoregressiven Modell	588
32.2	$GARCH(p, q)$ -Volatilitatsprognosen	590
32.2.1	Prognosen über mehrere Schritte	590
32.2.2	Prognose der Gesamtvarianz	594
32.2.3	Volatility Term Structure	595
32.3	$GARCH(1, 1)$ -Volatilitatsprognosen	595
32.4	Volatilitatsprognosen mittels gleitenden Durchschnitten	597
33	Hauptkomponentenanalyse (PCA)	601
33.1	Prinzipielles Vorgehen	601
33.2	Hauptkomponentenanalyse der deutschen Zinsstruktur	607
34	Vorverarbeitung und Gütemaße	611
34.1	Vorverarbeitung von Zeitreihen	611
34.1.1	Differenzenbildung	612
34.1.2	Filter	612
34.1.3	Skalentransformation	614
34.2	Gütemaße für Zeitreihenprozesse	615
34.2.1	Hypothesentests	615
34.2.2	Anpassungsgüte versus Prognosegüte	620
34.2.3	Beispiele: Gütemaße für $GARCH$ -Modelle	620

A	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	627
A.1	Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und Varianz	627
A.2	Multivariate Verteilungen, Kovarianz, Korrelation und Beta	629
A.3	Momente und Charakteristische Funktionen	632
	A.3.1 Moment Generating Functions	633
	A.3.2 Charakteristische Funktionen	635
A.4	Einige wichtige Verteilungen	637
	A.4.1 Die Gleichverteilung	637
	A.4.2 Die Binomialverteilung und Bernoulli-Versuche	638
	A.4.3 Die Normalverteilung und der zentrale Grenzwertsatz	640
	A.4.4 Die Lognormalverteilung	647
	A.4.5 Die Gamma-Verteilung	648
	A.4.6 Die χ^2 -Verteilung	650
A.5	Transformationen zwischen Verteilungen	657
	A.5.1 Summationen	657
	A.5.2 Box-Muller Transformation	658
	A.5.3 Inversion der Kumulierten	658