978-3-7910-3392-1 Schuldenzucker, Prüfungstraining Analysis und Lineare Algebra

SCHÄFFER
POESCHEL

Einleitung

Zur Beurteilung wirtschaftswissenschaftlicher Aufgabenstellungen sind häufig mathematische Methoden notwendig oder zumindest hilfreich.

(A) Folgende typische Fragestellungen können mit Hilfe von Funktionen einer Variablen beantwortet werden:

- Zu bestimmen ist, bei welchen hergestellten und verkauften Mengen einer Ware Verlust oder Gewinn erwirtschaftet wird.
- Zu bestimmen ist eine Warenmenge oder ein Preis, bei dem Angebot und Nachfrage übereinstimmen.
- Zu bestimmen ist diejenige Menge einer hergestellten und verkauften Ware, bei der der Gewinn maximal ist.
- Zu bestimmen ist diejenige regelmäßige Bestellmenge einer Ware, die die Gesamtkosten minimiert.
- Zu bestimmen ist
  - derjenige Umsatz, den Konsumenten nicht haben leisten müssen, obwohl sie dazu bereit gewesen wären,
  - derjenige Umsatz, den Produzenten über den aufgrund ihres Angebots erhofften Umsatz hinaus machen konnten.
- Um wie viel verändern sich die Herstellungskosten, wenn die hergestellte Menge eines Produkts um eine Mengeneinheit steigt?
- Um wie viele Prozentpunkte verändert sich die Nachfrage nach einem Gut, wenn der Preis um einen Prozentpunkt steigt?

(B) Folgende typische Fragestellungen können mit Hilfe von Funktionen mehrerer Variablen beantwortet werden:

- Wie viel größer ist der Nutzen beim Erwerb mehrerer Waren, wenn alle Mengen verdoppelt werden?
- Welche mathematische Beziehung herrscht zwischen zwei konsumierten Mengen, wenn der Nutzen derselbe ist?
- Bei welchen hergestellten und verkauften Mengen von zwei Produkten ist der Gewinn maximal?
- Beim Erwerb welcher Mengen mehrerer Waren ist der Nutzen maximal, wenn man nur einen bestimmten Geldbetrag ausgeben kann?
- Um wie viel verändert sich der Gewinn aus zwei Produkten, wenn eine der hergestellten Mengen um eine Mengeneinheit steigt?
- Um wie viele Prozentpunkte verändert sich die Nachfrage nach einem Gut, wenn der Preis dieses Guts um einen Prozentpunkt steigt und der eines konkurrierenden Guts gleich bleibt?
  Um wie viele Prozentpunkte verändert sich die Nachfrage nach einem Gut, wenn der Preis dieses Guts gleich bleibt und der Preis eines konkurrierenden Guts um einen Prozentpunkt steigt?

(C) Folgende typische Fragestellungen können mit Hilfe linearer Algebra beantwortet werden:

- Welche Produktmengen können bei gegebenen Maschinenlaufzeiten hergestellt werden?
- Welche Maschinenlaufzeiten sind nötig, um bestimmte Produktmengen herzustellen?
- Welcher Umsatz ergibt sich aus den Preisen und Verkaufsmengen mehrerer Waren?
- Bei welchen hergestellten Mengen ist der Deckungsbeitrag maximal unter gegebenen Produktionsbedingungen?
- Wenn bekannt ist, zu welchen Anteilen hergestellte Produkte vom eigenen Unternehmen verbraucht werden: Wie ergibt sich aus den hergestellten Mengen, welche Mengen im Unternehmen verbraucht werden?
  Welche Produktmengen können noch verkauft werden, wenn dieser Eigenverbrauch realisiert wird?
  Welche hergestellten Mengen sind nötig, damit das Unternehmen bestimmte Mengen selbst verbrauchen kann?
  Welche Mengen müssen hergestellt werden, um nach Abzug für den Eigenverbrauch im Unternehmen noch bestimmte Mengen für den Verkauf übrig zu haben?
  Welche Rohstoffmengen sind nötig, um gewünschte Mengen an Endprodukten herstellen zu können?

1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre, Relationen, Abbildungen

1.1.1 Mengen

In einer Menge sind Objekte zusammengefasst, die *Elemente* der Menge genannt werden.

Beispiel:
Mengen von Zahlen, Buchstaben, Dingen

Bemerkung:
Häufig werden in der Mathematik Platzhalter für Objekte benutzt, wenn man ausdrücken möchte, dass etwas »für alle Objekte« einer bestimmten Menge gilt. Als solche Platzhalter eignen sich gut Buchstaben, da sie kurz sind. Dabei hat sich eingebürgert, Mengen mit Großbuchstaben zu bezeichnen, während für Objekte, die in einer Menge liegen, häufig Kleinbuchstaben genutzt werden.

Beispiel:
Die Menge der vier Kinder einer Familie wird M genannt.
Die Kinder heißen Thomas, Anna, Max und Jule.
Dann ist also M die Menge, die aus Thomas, Anna, Max und Jule besteht.
Mathematisch notiert man das in der Form
$M = \{\text{Thomas, Anna, Max, Jule}\}$.
Die Mengenklammern { und } umrahmen alles, was zur Menge gehört.

Möchte man nun die beiden Mädchen in einer neuen Menge N zusammenfassen, so ist $N = \{\text{Anna, Jule}\}$.
Diese kleinere Menge N ist genau derjenige Teil von M, der nur die Mädchen enthält. Mathematisch kann man das notieren in der Form
$N = \{\text{Kinder } k, \text{ die zu } M \text{ gehören} \mid k \text{ ist ein Mädchen}\}$. Hierbei steht der senkrechte Strich | für eine Einschränkung.

Allgemeine mathematische Darstellung von Mengen:
$M = \{a | a \text{ hat diese Eigenschaft}\}$ steht für:
M ist die Menge der Objekte a, für die gilt: a hat diese Eigenschaft.

Beispiel:
$M = \{a | a \text{ studiert in Köln}\}$ ist die Menge der Studierenden in Köln.
$a \in M$ steht für: a ist Element der Menge M.
$Schmitt \in M$ bedeutet: *Schmitt* studiert in Köln.
$Meier \notin M$ bedeutet: *Meier* studiert nicht in Köln.

Beziehungen zwischen Mengen:

Seien M und N zwei Mengen.

(a) $M \subset N$ bedeutet: M ist *Teilmenge* von N.

Das heißt, dass alle Elemente von M auch in N liegen.

Beispiel:

$M = \{\text{Hunde}\}$, $N = \{\text{Tiere}\}$

Jeder Hund ist ein Tier: $M \subset N$

Gleichbedeutend ist:

$N \supset M$ $\quad$ *N umfasst M.*

(b) $M = N$ bedeutet: M umfasst N und N umfasst M.

Beispiel:

$M = \{\text{Segelflugzeuge}\}$

$N = \{\text{gliders}\}$

(c) $M \cap N$ $= \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$

$=$ $\boxed{\textit{Durchschnitt}}$ von M und N,

$=$ Schnittmenge von M und N

Beispiel:

$N = \{\text{Brötchen mit Butter}\}$

$M = \{\text{Brötchen mit Käse}\}$

$M \cap N = \{\text{Brötchen mit Butter } \boxed{\textit{und}} \text{ Käse}\}$

Der Durchschnitt zweier Mengen M und N besteht aus den Elementen, die in M *und* in N liegen.

(d) $M \cup N$ $= \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$

$=$ $\boxed{\textit{Vereinigung}}$ von M und N

Beispiel:

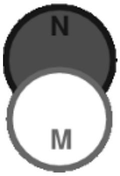
$N = \{\text{Brötchen mit Butter}\}$

$M = \{\text{Brötchen mit Käse}\}$

$M \cup N = \{\text{Brötchen mit Butter } \boxed{\textit{oder}} \text{ Käse}\}$

Die Vereinigung zweier Mengen M und N besteht aus den Elementen, die in M *oder* in N (oder in beiden) liegen.

(e) $N \backslash M$ $= \{x \in N \mid x \notin M\}$



= Differenzmenge von N und M

= N außer M

Beispiel:

$N = \{\text{Brötchen mit Butter}\}$

$M = \{\text{Brötchen mit Käse}\}$

$N \backslash M = \{\text{Brötchen mit Butter ohne Käse}\}$

(f) $\overline{M}$ in N ist das *Komplement* von M in N.

Es besteht aus allen Elementen von N, die nicht in M liegen.

Beispiel:

$M = \{\text{Brötchen mit Käse}\}$

In $N: \overline{M} = N \backslash M$

(g) $\emptyset$ ist das Symbol für die *leere Menge*:

Sie enthält kein Element.

Beispiel:

$N = \{\text{Studierende in Köln}\}$

$M = \{\text{Menschen}\}$

$N \backslash M = \emptyset$

(h) $|N|$ ist die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* von N.

Dies ist die Anzahl der Elemente von N.

1.1.2 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$= \text{Menge der natürlichen Zahlen}$$

Die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ enthält zusätzlich die Zahl 0.

Eine Menge, die gleichmächtig zu einem Abschnitt $\{1, 2, \ldots, n\}$ der Zahlenreihe ist, heißt *endlich*.

Beispiel:

$A = \{\text{Kurt, Maria, Anton, Elisabeth}\}$

$|A| = 4$ ist die Anzahl der Elemente von A.

Wenn eine Menge endlich ist und n Elemente enthält, lassen sich ihre Elemente mit den Nummern 1 bis n versehen (*indizieren*), so dass verschiedene Elemente verschiedene Nummern erhalten und alle Nummern von 1 bis n benutzt werden.

Alternativ ist etwa eine Nummerierung mit den Indices $0, \dots, n-1$ möglich.

Beispiel:
Kurt $= a_1$ Maria $= a_2$ Anton $= a_3$ Elisabeth $= a_4$
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

Wenn man definiert
Kurt $= b_0$ Maria $= b_1$ Anton $= b_2$ Elisabeth $= b_3$,
gilt ebenso: $A = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$.

Die Elemente einer endlichen Menge A der Mächtigkeit $|A| = n$ kann man also zum Beispiel mit $a_1, \dots, a_n$ oder etwa mit $b_0, \dots, b_{n-1}$ bezeichnen:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$$

Eine Menge, die der Reihe aller natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich*.
Eine abzählbar unendliche Menge lässt sich mit Nummern versehen, sodass jede natürliche Zahl genau ein Mal als Nummer benutzt wird. Die Zahlen n heißen in diesem Zusammenhang *Indizes* (Einzahl: *Index*).

Beispiel:
$A = \left(2^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (2^n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$

Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Eine Summe von mehreren Zahlen $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$ wird abkürzend geschrieben als $\sum_{n=1}^{k} a_n$:

Das Summenzeichen $\sum$ ist ein großes griechisches Sigma. Statt $a_1, a_2, \dots$ schreibt man das *allgemeine Glied* a_n.
Unter dem Summenzeichen wird notiert, wo man zu summieren beginnt:
Hier bei $n = 1$.
Über dem Summenzeichen wird notiert, wo die Summation aufhört:
Hier bei $n = k$.

Beispiel:
Die Summe der ersten fünf natürlichen Zahlen beträgt
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i = 15$.
Die Summe der Quadrate der ersten fünf natürlichen Zahlen beträgt $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$.
Man kann ebensogut die Zahlenfolge $a_i = i^2$ definieren und diese Summe notieren als $\sum_{i=1}^{5} a_i$.

Die Menge der ganzen Zahlen

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \text{Menge der ganzen Zahlen}\\ &= \text{Menge der natürlichen Zahlen} \cup \{0\} \cup \text{Menge der Negativen natürlicher Zahlen}\\ &= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}\end{aligned}$$

Die Menge der rationalen Zahlen

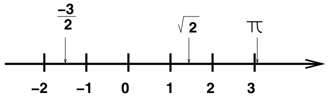
$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \{\tfrac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}\\ &= \text{Menge der rationalen Zahlen}\\ &= \text{Menge der Brüche ganzer Zahlen}\end{aligned}$$

Die Menge der reellen Zahlen

Alle Zahlen, die sich nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, heißen *irrational*. Die rationalen und irrationalen Zahlen gemeinsam ergeben die Menge der reellen Zahlen:

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen kann als Zahlengerade dargestellt werden.



Intervalle

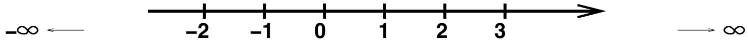
Ein Intervall ist ein Abschnitt auf der reellen Zahlengeraden.
Ein Intervall ist an einer seiner Grenzen abgeschlossen, wenn diese Grenze zum Intervall gehört; das drückt sich dadurch aus, dass alle Zahlen des Intervalls kleinergleich beziehungsweise größergleich dieser Grenze sind. Ist ein Intervall an einer seiner Grenzen offen, so heißt das, dass diese Grenze nicht zum Intervall gehört; das bedeutet, dass alle Zahlen des Intervalls kleiner beziehungsweise größer als diese Grenze sind.

Je nach dem, welche Endpunkte zum Intervall gehören, notiert man:

Abgeschlossenes Intervall:	$= [a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Linksoffenes Intervall:	$=]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Rechtsoffenes Intervall:	$= [a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Offenes Intervall:	$=]a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Unendlich

Das Symbol für »plus unendlich« ist ∞.
$-\infty$ steht für »minus unendlich«.



Beide sind keine reellen Zahlen, daher müssen Intervalle, die bis $-\infty$ oder $+\infty$ reichen, dort offen sein:

Beispiel:

$]-\infty, 1]$	ist das Intervall von $-\infty$ bis 1, 1 ist eingeschlossen
$]-\infty, 1[$	ist das Intervall von $-\infty$ bis 1, 1 ist ausgeschlossen
$[0, \infty[$	ist das Intervall von 0 bis ∞, 0 ist eingeschlossen
$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$	ist die ganze Zahlengerade.

1.1.3 Relationen

Häufig wird die Menge derjenigen reellen Zahlen gesucht, die einer bestimmten Aussageform genügen. Die *Lösungsmenge* besteht aus denjenigen Zahlen, die die Aussageform erfüllen. Solche zunächst unbekannten Zahlen werden gern x genannt. Man erhält die Lösungsmenge, indem man die Aussageform »nach x auflöst«.
Wie man eine Aussageform nach x auflösen kann, hängt von der konkreten Aussageform ab. Das allgemeine Prinzip ist, dass man von der Seite, auf der x steht, nach und nach Terme auf die andere Seite bringt; dabei beginnt man gewissermaßen weit weg von x und nähert sich langsam der unbekannten Zahl x. Es gelten natürlich alle Rechenregeln wie etwa »Punktrechnung vor Strichrechnung« und Distributionsgesetze.
Es ist üblich, rechts seitlich der Aussageform hinter einem senkrechten Strich zu notieren, welche Rechenoperation man als nächstes durchführt.

Beispiel:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der Aussageform $x^2 - 9 = 0$.

Lösung:

$x^2 - 9$	$= 0$	$\mid +9$
x^2	$= 9$	$\mid +\sqrt{}$ oder $-\sqrt{}$
x	$= +3$	oder
x	$= -3$	
L	$= \{-3, 3\}$	ist die Lösungsmenge.

Beim Auflösen nach x erhält man nur dann die exakte Lösungsmenge, wenn die Aussageform *äquivalent* umgeformt wird, d. h. wenn die hergeleiteten Aussageformen gleichwertig sind.

Beispiel:
Zu einer Gleichung die Zahl 9 zu addieren, ist eine Äquivalenzumformung: Die ursprüngliche Gleichung gilt genau, wenn die neue Gleichung gilt.

Aus beiden Seiten einer Gleichung die positive Wurzel zu ziehen, ist keine Äquivalenzumformung, denn das Quadrat des Negativen der Wurzel ergibt dasselbe Ergebnis wie das Quadrat der positiven Wurzel. Zieht man aus einer Gleichung sowohl die positive als auch die negative Wurzel, so erhält man eine äquivalente Aussageform:

x^2 ist gleich 9 genau, wenn $x = +3$ oder $x = -3$ ist.

Symbolschreibweise für Aussagen

Es seien A und B Aussagen.

$A \Rightarrow B$	bedeutet:	Aus A folgt B.
Beispiel:	A: x ist größer als 8 B: x ist größer als 3	$(x > 8) \Rightarrow (x > 3)$
$A \Leftarrow B$	bedeutet:	Aus B folgt A.
Beispiel:	A: x ist kleiner als 8 B: x ist kleiner als 3	$(x < 8) \Leftarrow (x < 3)$
$A \Leftrightarrow B$	bedeutet:	A und B sind gleichwertig.
Beispiel:	A: x ist kleiner als 3 B: $-x$ ist größer als -3	$(x < 3) \Leftrightarrow (-x > -3)$

1.1.4 Der Absolutbetrag

Für jede reelle Zahl x ist der Betrag $|x|$ der positive Anteil von x.

Für jede nicht-negative Zahl a ist die Menge der Zahlen x mit $|x| = a$ gerade
$L = \{-a, a\}$.

Für jede nicht-negative Zahl a ist die Menge der Zahlen x mit $|x| \leq a$ gerade
$L = \{x \in \mathbb{R} | -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$.

Für jede nicht-negative Zahl a ist die Menge der Zahlen x mit $|x| \geq a$ gerade
$L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a \text{ oder } -x \geq a\} = \mathbb{R} \backslash]-a, a[=]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$.

Für jede nicht-negative Zahl a und jede Zahl b ist die Menge der Zahlen x mit $|x - b| \leq a$ gerade
$L = \{x \in \mathbb{R} | -a \leq x - b \leq a\} = [-a + b, a + b]$.

Für jede nicht-negative Zahl a und jede Zahl b ist die Menge der Zahlen x mit $|x - b| \geq a$ gerade

$$\begin{aligned} L &= \{x \in \mathbb{R} | x - b \geq a \text{ oder } -(x - b) \geq a\} \\ &= \mathbb{R} \backslash]-a + b, a + b[\\ &=]\infty, -a + b] \cup [a + b, \infty[. \end{aligned}$$

1.2 Potenzrechnung, binomische Formeln

1.2.1 Potenzrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist	a^n	$= a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n-mal)
Für $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist	a^0	$= 1$; 0^0 ist nicht definiert.
Für $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ gelten:	a^{-1}	$= \frac{1}{a}$
	a^{-m}	$= \frac{1}{a^m}$
Für $a \geq 0, m \in \mathbb{N}$ ist	$a^{\frac{1}{m}}$	$= \sqrt[m]{a}$ diejenige nicht-negative Zahl mit $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a$.
Für $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ und $a \in \mathbb{R}^+$ ist	a^q	$= \sqrt[m]{a^n}$

1.2.2 Binomische Formeln

Drei quadratische binomische Formeln

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

1.3 Übungsaufgaben

Mengenlehre

Aufgabe 1.1

(a) Es sei M die Menge aller Rektoren einer bestimmten Hochschule
Was ist $|M|$?

(b) Ermitteln Sie folgende Mengen von Buchstaben:
$\{A, B, C, V\} \setminus \{A, B, C, D, E\}$
$\{A, B, C, V\} \cap \{A, Y, Z\}$
$\{A, B, C, V\} \cup \{C, D\}$

Aufgabe 1.2

Seien $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Bestimmen Sie $M \cup N$.

(b) Bestimmen Sie $M \cap N$.

(c) Ermitteln Sie $N \cap M$.

(d) Gilt $M \subset N$?

(e) Berechnen Sie $|M|$.

Natürliche, rationale und reelle Zahlen

Aufgabe 1.3

Sie legen am Ende des ersten Monats 1 € zurück.
Sie legen am Ende jedes weiteren Monats das Doppelte des Vormonats zurück.
Notieren Sie das allgemeine Glied der entstehenden Zahlenfolge, wenn a_n der am Ende des $n-$ten Monats zurückgelegte Betrag ist, und die ersten drei Folgeglieder.

Aufgabe 1.4

Notieren Sie das allgemeine Folgeglied folgender Folgen:

(a) $2, 4, 6, 8, 10,$

(b) $1, 3, 5, 7, 9,$

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen, ob sie natürlich, ganz, rational oder irrational sind:

(a) 8

(b) -5

(c) 0.5

(d) $0.\bar{6}$

Gesucht ist jeweils die kleinste Zahlenmenge, in der die Zahl liegt.
Kennen Sie irrationale Zahlen?

Intervalle

Aufgabe 1.6
Können Sie für folgende Zahlen jeweils die kleinste und größte Zahl nennen, die darin liegt? (Es ist nicht immer möglich.)

(a) $[0, 5]$
(b) $[-2, 4[$
(c) $]2, 10]$
(d) $[2, 20[$
(e) $]-\infty, 8]$
(f) $[8, \infty[$

Relationen

Aufgabe 1.7
Gesucht sind die Lösungsmengen folgender (Un-)Gleichungen:

(a) $4 + 3 \cdot x < 10$
(b) $-2 \leq 4 - 4 \cdot x < 12$
(c) $\frac{10}{2} + \frac{1}{x} = 10$
(d) $x^5 - 2 = 30$
(e) $\frac{4}{x} : \frac{1}{5} = 10$
(f) $-2 < 6x - 5 < 4x - 3$

Aufgabe 1.8
Gesucht ist die Lösungsmenge L der Gleichung $\frac{4}{x^{0.2}} - 8 = 12$.

Aufgabe 1.9
Gesucht ist die Lösungsmenge L der Ungleichungskette
$2x + 1 > 4x > 5x - 2$.

Der Absolutbetrag

Aufgabe 1.10
Bestimmen Sie

(a) $|3|$
(b) $|-7.5|$
(c) $\{x \in \mathbb{R} | |x| < 3\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 3\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} | |x - 4| < 3\}$
(f) $\{x \in \mathbb{R} | |x - 4| > 3\}$

Potenzrechnung

Aufgabe 1.11
Formen Sie um und berechnen Sie:

(a) 3^{2+5}

(b) 3^{5-2}

(c) 5^{-3}

(d) $4^{2\cdot 3}$

(e) $3^{\frac{2}{5}}$

Aufgabe 1.12
Notieren Sie als Dezimalzahl $5\cdot 10^{-2}+4\cdot 10^{-1}+3\cdot 10^{0}+2\cdot 10^{1}+1\cdot 10^{2}$

Aufgabe 1.13
Vereinfachen Sie:

(a) $x^4\cdot x^2$

(b) $x^4\cdot x^{-3}$

(c) $\frac{x^4}{x^2}$

(d) $\frac{x^4}{x^{-2}}$

(e) $x^{0.8}\cdot x^{-0.3}$

(f) $\frac{x^{0.8}}{x^{-0.3}}$

Aufgabe 1.14
Lösen Sie die Gleichung $4x^{-7.5}=0.1$.

1.4 Lösungen

Lösung 1.1

(a) $|M| = 1$ ist die Anzahl der Elemente der Menge M aller Rektoren einer bestimmten Hochschule.

(b) Buchstabenmengen:

$$\{A, B, C, V\} - \{A, B, C, D, E\} = \{V\}$$
$$\{A, B, C, V\} \cap \{A, Y, Z\} = \{A\}$$
$$\{A, B, C, V\} \cup \{C, D\} = \{A, B, C, D, V\}$$

Lösung 1.2

Gegeben sind $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(a) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(b) $M \cap N = \{2, 4\}$

(c) $N \cap M = M \cap N = \{2, 4\}$.

(d) Es gilt nicht $M \subset N$, da es Elemente von M gibt, die nicht in N liegen, wie zum Beispiel die Zahl 10.

(e) $|M| = 5$.

Lösung 1.3

Am Ende des ersten Monats wird 1 € zurückgelegt, am Ende jeden weiteren Monats das Doppelte des Vormonats.
Sie erhalten eine unendliche Folge $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Beträgen $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.
Sie nummerieren diese Folge durch:

$$a_n = 2^{n-1} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 4$$

Lösung 1.4

(a) Das allgemeine Glied der Zahlenfolge $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$, ist $a_n = 2 \cdot n$, wenn n die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ durchläuft.

(b) Das allgemeine Glied der Zahlenfolge $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$, die aus den ungeraden Zahlen besteht, ist $a_n = 2 \cdot n - 1$, wenn n die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ durchläuft.

Lösung 1.5

(a) 8 ist natürlich.

(b) -5 ist ganz.

(c) 0.5 ist rational, denn $0.5 = \frac{1}{2}$.

(d) $0.\bar{6}$ ist auch rational, denn $0.\bar{6} = \frac{2}{3}$.

Irrational sind zum Beispiel $\sqrt{2}$, die Euler'sche Zahl e und π.