
Prefazione

Questo testo è stato sviluppato a partire da una dispensa informale scritta per gli Studenti del corso di “Fisica dei Materiali” (Laurea Specialistica in Fisica, Università di Cagliari) tenuto da uno degli Autori negli a.a. '05/'06 e '06/'07. Nella sua forma attuale esso rappresenta uno sforzo di riassunto auto-contenuto dei concetti di base del continuo elastico e del relativo formalismo matematico.

I fisici, purtroppo, hanno smesso da decenni di studiare la meccanica dei solidi tramite l'uso di teorie di continuo; conseguentemente, questa disciplina è praticamente scomparsa dai *curricula* degli attuali corsi di studio. È opinione degli Autori che ciò rappresenti una grave perdita culturale. Due sono i motivi alla base di questa convinzione:

- La meccanica dei solidi rappresenta un *corpus* di conoscenze di formidabile robustezza concettuale, di raffinata eleganza matematico-formale e di grandissima utilità applicativa (si pensi a tutta l'ingegneria strutturale). Come tale ha una valenza formativa in fisica della materia (e, anche, in fisica-matematica) molto forte.
- Essa, poi, costituisce uno dei punti-cardine su cui si articola il moderno paradigma della simulazione multi-scala dei materiali. La comprensione delle proprietà e del comportamento di un materiale reale può, infatti, avvenire unicamente tramite la concorrenza di metodi affatto diversi, capaci di far filtrare l'informazione fisica attraverso diverse scale spaziali. Mentre alla nanoscala opera la meccanica quantistica, alla micro- e meso-scala opera il continuo. La conoscenza del continuo elastico, dunque, abilita lo Studente ed il Ricercatore a confrontarsi con una delle più attuali ed affascinanti sfide della ricerca in questo campo.

In aggiunta, la teoria dell'elasticità e le sue applicazioni restano un fondamento per varie discipline, quali l'ingegneria meccanica, la scienza delle costruzioni, parte dell'ingegneria biomedica e parte della matematica applicata. A tal proposito si ricordi che le teorie dei mezzi continui deformabili hanno dato nel XIX secolo un impulso straordinario allo sviluppo della fisica mate-

matica per quanto riguarda le equazioni alle derivate parziali e i loro metodi di soluzione.

Queste note – pur non avendo la pretesa di sostituire alcun testo classico di meccanica del continuo – hanno tuttavia l’ambizione di introdurre lo Studente alla teoria della elasticità, attraverso la scelta di un numero ristretto di problemi di paradigmatica importanza concettuale. Il testo è strutturato su tre diversi moduli didattici, completati da Appendici e da un’ampia Bibliografia. La struttura a moduli è concepita come ausilio per il Docente che voglia adottare questo testo come riferimento per il proprio corso. Il primo modulo, che contiene l’introduzione al continuo elastico, ben si presta ad un corso di base (Laurea Triennale) di respiro tri- o quadri-mestrale. Il secondo modulo sviluppa due applicazioni di paradigmatica importanza e, insieme al primo, costituisce materiale sufficiente per un corso semestrale. Infine, il terzo modulo tratta la meccanica dei solidi in regime lineare elastico nell’ambito della sofisticata teoria di Eshelby. La complessità dello strumento matematico e la generalità degli argomenti presentati rendono questo modulo adatto ad un corso avanzato (Laurea Specialistica). In dettaglio:

Primo modulo: La teoria di base

- Il primo Capitolo presenta le definizioni fondamentali di tensore delle deformazioni e di tensore degli sforzi, e fornisce informazioni sulla struttura formale della meccanica dei solidi.
- Il secondo Capitolo descrive in dettaglio la meccanica del mezzo omogeneo e isotropo in regime lineare elastico. Qui vengono ricavati e discussi alcuni dei più importanti risultati della teoria dell’elasticità.
- Il terzo Capitolo sviluppa i concetti di lavoro di una deformazione e della relativa termodinamica. Qui si trovano argomentazioni di tipo energetico.

Secondo modulo: Le applicazioni

- Il quarto Capitolo tratta il problema delle onde elastiche, nel caso di mezzo omogeneo ed isotropo. Si introducono le onde piane trasversali e longitudinali, i problemi all’interfaccia tra due mezzi diversi ed alcuni cenni sulle onde superficiali.
- Il quinto Capitolo presenta la teoria lineare elastica della frattura. Questo argomento è di formidabile importanza applicativa e anche di grandissima attualità per applicazioni in nano-scienza e nano-tecnologia.

Terzo modulo: La teoria avanzata

- Il sesto Capitolo affronta sistematicamente il raffinato metodo formale dovuto a Eshelby, fondamentale per lo studio di inclusioni e disomogeneità elastiche. Questa teoria rappresenta il nucleo fondante della moderna micro- e nano-meccanica.
- Il settimo Capitolo, infine, rappresenta una risistemazione formale di alcuni importanti risultati precedentemente discussi, in particolare riguardanti la

meccanica della frattura. Si introduce inoltre il concetto di densità degli stati, con applicazioni al tensore degli sforzi.

Nelle Appendici, aggiunte per completezza, vengono dettagliatamente dimostrati alcuni risultati importanti citati (o usati) nel testo principale.

Infine, una ricca selezione di esercizi ed esempi svolti è distribuita su tutti i capitoli del testo. Essi mostrano le potenzialità applicative della teoria dell'elasticità, ma spesso rappresentano anche un approfondimento rispetto al materiale trattato nella parte istituzionale.

Ogni opera scritta contiene errori, nonostante l'attenzione e la cura prestata dagli Autori. Non crediamo che questo testo possa fare eccezione. Invitiamo, dunque, il Lettore a segnalare agli Autori eventuali imprecisioni od errori formali.

Desideriamo ringraziare tutti i membri del gruppo "I Meccanici": questo testo rappresenta, sotto molti aspetti, un risultato collettivo sia in termini di conoscenze acquisite o di risultati sviluppati originalmente, sia in termini di "visione" generale. Il gruppo di lavoro "I Meccanici" è nato il 22 ottobre 2004 e rappresenta una informale aggregazione di fisici computazionali della materia, che hanno deciso di applicare i metodi ed i risultati della simulazione atomistica allo studio del comportamento meccanico di materiali complessi. Alla data attuale, il gruppo è formato da (ordine alfabetico): Luciano Colombo, Giorgia Fugallo, Stefano Giordano, Mariella Ippolito, Alessandro Mattoni e Pierluca Palla.

Uno degli Autori (L.C.) desidera, ringraziare in modo particolarmente caloroso il Prof. Fabrizio Cleri (Université de Lille), ricordando le tante stimolanti discussioni sulla meccanica dei materiali complessi e riconoscendo a lui il merito di aver insistito perché, agli inizi degli anni 2000, si iniziasse un'attività di ricerca comune in questo settore.

Infine, uno degli Autori (S.G.) desidera ringraziare Alessandra Pesce per l'aiuto apportato nella rilettura del testo.

Cagliari,
Maggio 2007

Luciano Colombo
Stefano Giordano

Indice

1	Meccanica del continuo: generalità	1
1.1	Generalità sulle deformazioni	1
1.2	Tensore delle deformazioni	4
1.3	Esempi di calcolo delle deformazioni	6
1.3.1	Trazione (o compressione) semplice	6
1.3.2	Deformazione di taglio puro	7
1.3.3	Deformazione di puro piegamento	8
1.4	Proprietà del tensore delle deformazioni	10
1.5	Tensore degli sforzi	14
1.6	Struttura formale della meccanica dei solidi	18
1.7	Esercizi del Capitolo 1	20
2	Continuo lineare elastico	27
2.1	Equazione costitutiva elastica	27
2.2	Notazione di Voigt	29
2.3	Mezzo omogeneo ed isotropo	32
2.3.1	Relazione normale: argomento fenomenologico	33
2.3.2	Relazione normale: argomento formale	36
2.3.3	Modulo di compressibilità	38
2.4	Moduli di elasticità	40
2.5	Esempi di calcolo degli sforzi	44
2.5.1	Sforzo in una deformazione monoassiale	44
2.5.2	Sforzo in una deformazione di taglio	45
2.5.3	Sforzo di torsione	46
2.5.4	Deformazioni e sforzi monoassiali	48
2.6	Condizioni al contorno	49
2.6.1	Condizione di deformazione piana	50
2.6.2	Condizione di sforzo piano	51
2.7	Esercizi del Capitolo 2	52

3	Energia elastica	71
3.1	Lavoro ed energia	71
3.2	Lavoro e densità di energia potenziale elastica	73
3.3	Deformazione a temperatura finita	77
3.3.1	Potenziali termodinamici	78
3.3.2	Mezzi omogenei ed isotropi	80
3.4	Deformazione a temperatura variabile	83
3.5	Trasmissione termoelastica del calore	84
3.6	Esercizi del Capitolo 3	86
4	Onde elastiche	97
4.1	Sviluppo dell'equazione del moto	98
4.2	Onde elastiche piane trasversali e longitudinali	99
4.3	Equazione di D'Alembert	102
4.4	Onde longitudinali: approfondimento	105
4.5	Onde trasversali: approfondimento	107
4.6	Regime sinusoidale permanente	109
4.7	Trasmissione e riflessione	112
4.7.1	Incidenza ortogonale	112
4.7.2	Ecografia	114
4.7.3	Incidenza obliqua	117
4.8	Viscoelasticità	119
4.9	Esercizi del Capitolo 4	124
5	Meccanica della frattura	133
5.1	Fenomenologia di base	134
5.1.1	Frattura fragile e duttile	134
5.1.2	Il ruolo della microstruttura	136
5.2	Il criterio di Griffith	139
5.3	Resistenza alla frattura	143
5.3.1	Rilascio di energia e resistenza	144
5.3.2	La curva R	145
5.3.3	La forza G e le condizioni di carico	146
5.4	Campo di sforzo all'apice di cricca	149
5.5	Esercizi del Capitolo 5	152
6	Teoria di Eshelby	163
6.1	Introduzione	164
6.2	La funzione di Green in teoria dell'elasticità	165
6.3	Definizione di autodeformazione e di inclusione	167
6.4	Il nucleo della teoria di Eshelby	170
6.4.1	Teoria per inclusioni omogenee ellissoidali	170
6.4.2	Potenziali armonico e biarmonico	174
6.4.3	Il tensore di Eshelby interno	176
6.4.4	Il caso della sfera	178

6.5	Il principio di equivalenza di Eshelby	179
6.6	Energia elastica di una disomogeneità	186
6.6.1	Mezzo infinitamente esteso	186
6.6.2	Mezzo di volume finito: energia di interazione	190
6.7	Esercizi del Capitolo 6	193
7	Applicazioni della teoria di Eshelby	213
7.1	Applicazione alla teoria della frattura	213
7.2	Analisi della cricca di Griffith	215
7.2.1	Condizione di sforzo piano	218
7.2.2	Condizione di deformazione piana	221
7.3	Analisi della cricca circolare	222
7.3.1	Condizione di sforzo piano	223
7.3.2	Condizione di deformazione piana	225
7.4	La densità degli stati per lo sforzo	226
7.4.1	Densità degli stati per una cricca di Griffith	231
7.4.2	Densità degli stati per una cricca circolare	233
7.5	Esercizi del Capitolo 7	235
	Appendici	243
A	Decomposizione polare di Cauchy	243
A.1	Teorema di decomposizione	243
A.2	Applicazione al concetto di piccole deformazioni	244
B	Condizioni di congruenza	247
C	Teorema di Cauchy	249
D	Equazioni della meccanica del continuo	251
D.1	Bilancio della quantità di moto	251
D.2	Bilancio del momento della quantità di moto	252
E	Invarianti di un'applicazione lineare	255
F	Cenni sulle dislocazioni	257
F.1	Dilocazione a spigolo	259
F.2	Dislocazione a vite	259
G	Cenni sul problema di Saint-Venant	261
H	Le trasformate di Fourier	265
H.1	Trasformate di Fourier a simmetria cilindrica	267
H.2	Trasformate di Fourier a simmetria sferica	268

I	Calcolo dei potenziali armonico e biarmonico	271
I.1	Teorema del potenziale armonico	271
I.2	Teorema del potenziale biarmonico	273
J	Espressioni esplicite per il tensore di Eshelby	275
J.1	Ellissoide	275
J.2	Sfera	277
J.3	Cilindro	277
J.4	Cilindro ellittico	277
J.5	Inclusione piatta (a moneta)	278
J.6	Ellissoidi di rotazione	278
J.7	Cricca di Griffith	279
J.8	Cricca circolare	279
J.9	Cricca ellittica	280
K	Notazioni	281
L	Simboli	283
	Bibliografia	287
	Indice	289